EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

Creativiteit testen
Stroken met etiketten
Zebra's

december
2003/nr.3
jaargang 79



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

3

december 2003 JAARGANG 79

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Rinus Roelofs, Hengelo
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 42,50
Studentleden: € 22,50
Gepensioneerden: € 27,50
Leden van de VVWL: € 27,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 27,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 47,50
Instituten en scholen: € 127,50
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

INHOUD

Aan dit nummer werkte verder mee:
Jan Smit.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Vernieuwing basisvorming

Begin november werd door de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming een bijgestelde versie gepubliceerd van een ontwerp *kerndoelen voor een nieuwe onderbouw voortgezet onderwijs*. Let wel, de term 'basisvorming' valt niet meer. Dit voorstel kwam tot stand om problemen als *gebrek aan samenhang*, inhoudelijke versnippering en *overladenheid* het hoofd te bieden (meer dan 300 tamelijk scherp afgebakende kerndoelen voor in totaal 16 verschillende vakken worden in de plannen teruggebracht tot circa 60 globaal geformuleerde kerndoelen voor 7 domeinen), en vanuit het streven om *actief en zelfstandig leren* beter mogelijk te maken.
De nieuwe kerndoelen zijn niet in de eerste plaats ontworpen vanuit *vak*concepten; *pedagogische creativiteit* in scholen zou juist het leidmotief moeten gaan vormen. Scholen krijgen daarnaast de vrijheid om 'arrangementen op maat' te bieden aan de verschillende groepen leerlingen, van vmbo-basisberoepsgericht tot en met gymnasium. Dat betekent dat de kerndoelen verschillend uitgewerkt kunnen (en moeten?!) worden voor de verschillende groepen leerlingen, in tweederde van de leertijd van twee leerjaren. De rest is een 'differentieel deel', vrij in te vullen door de school.
De nieuwe kerndoelen zijn geordend in zeven grote domeinen: Nederlands, Engels, Wiskunde, Mens en natuur, Mens en maatschappij, Kunst en cultuur, Bewegen en sport. De school kan hieraan een uitwerking geven binnen de bestaande vakken, maar ook binnen vakkencombinaties, projecten en leergebieden, of in termen van leerlingcompetenties.
In de beschrijving van het vernieuwde domein wiskunde is met name aandacht voor *wiskundige geletterd- en gecijferdheid, betekenisvolle contexten* en de *transfer van wiskundevaardigheden naar andere leergebieden*. De huidige 29 kerndoelen voor wiskunde worden beperkt tot negen globaal geformuleerde kerndoelen. Een voorbeeld: 'De leerling leert de structuur en de samenhang te doorzien van positieve en negatieve getallen, decimale getallen, breuken, procenten, verhoudingen en lineaire verbanden en leert ermee te werken in zinvolle en praktische situaties.' U vindt ze alle negen in het 'Ontwerp nieuwe kerndoelen, versie november 2003' op *www.vernieuwingbasisvorming.nl*.
Volgens de planning zal de Taakgroep medio 2004 een eindadvies formuleren.

Erelid

Op 1 oktober jl. werd bij de Inspectie van het Onderwijs op feestelijke wijze afscheid genomen van coördinerend inspecteur Wim Kleijne, die ook nog vakinspecteur voor wiskunde geweest is. Binnen en buiten de Inspectie toonde Wim zich als voormalig wiskundedocent altijd bijzonder betrokken bij het wiskundeonderwijs. Dat bleek onder meer uit zijn vele bijdragen aan Euclides – hij was ook redactielid van Euclides. Zo vindt u in dit nummer een interessant artikel van zijn hand over een internationaal inspectie-onderzoek naar de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in negen Europese landen. En ook voor het eerstvolgende nummer, onze jaarlijkse special, heeft Wim weer een bijdrage geleverd!
Ter gelegenheid van zijn afscheid ontving Wim Kleijne de allereerste 'Verenigingsspeld', een zilveren speld met het logo van de NVvW. Op de jaarvergadering van de Vereniging in november werd hij bovendien benoemd tot erelid. Wim, gefeliciteerd, ook namens de redactie!

Glas-icosidodecaëder

Het ontwerp van Rinus Roelofs dat de voorkant van dit decembernummer siert, is een figuur opgebouwd uit 20 glazen kegelvormen. Het patroon aan de buitenkant van de figuur komt overeen met dat van de icosidodecaëder, een halfregelmatig veelvlak dat uit 20 driehoeken en 12 vijfhoeken bestaat. Mooi, vind ik.
Deze fraaie 'kerstbal' vormt meteen ook het bruggetje naar mijn afsluiter: de redactie wenst u goede feestdagen en een fijne vakantie!

CREATIVITEIT TESTEN

'Wiskundige kennis op een nieuwe manier gebruiken is een uiting van creativiteit en dus van wiskundige begaafdheid.'

[Jenneke Krüger]

Inleiding

Dit artikel is een verslag van een verkenning naar de belangstelling voor en bruikbaarheid van een test op creativiteit om (hoog)begaafde leerlingen wat betreft wiskunde in de basisvorming te herkennen.
Elke betrokken docent weet dat er vele redenen zijn waarom (hoog)begaafde leerlingen niet opvallen door hun prestaties of zelfs afhaken.[1] Hoewel er veel docenten zijn die proberen aandacht aan deze leerlingen te besteden lijkt het er toch op dat de huidige basisvorming, zowel wat betreft vakinhoud als didactische aanpak, begaafde leerlingen te kort doet.
Creativiteit beschouwt men als een van de aspecten van hoogbegaafdheid, een aspect dat in de 'normale' wiskundelessen niet altijd opvalt.
Vragen waar wiskundedocenten mee geconfronteerd worden:
- Hoe herken je (hoog)begaafdheid bij je leerlingen tijdens je wiskundelessen?
- Hoe hou je (hoog)begaafde leerlingen geïnteresseerd in wiskunde?

Inzicht bieden in wiskundige creativiteit

Ook in andere landen speelt dit soort problemen. Tijdens de internationale conferentie over creativiteit in wiskundeonderwijs en begaafde leerlingen in 2002 in Riga[2] vertelden twee sprekers - Peter Pool en John Threlfall van de AEU (Assessment and Evaluation Unit) van Leeds University - over de testen die door hen ontwikkeld worden met als doelstelling de beste 10% van wiskundig begaafde leerlingen te signaleren in twee leeftijdscategorieën (9 en 13 jaar). De testen leggen meer nadruk op het tonen van creativiteit dan op een grote wiskundige kennis. Een opgave is een goede testvraag als een leerling *niet* 'weet hoe het moet', maar *wel* aan het denken gaat en op weg gaat naar een oplossing.[3]
'Test' is hier een misleidend woord. De opgaven zijn niet bedoeld als een soort extra IQ-test of Cito-test om leerlingen te selecteren op basis van een genormeerde creativiteitsschaal, vakkennis of wat dan ook. Er is geen absolute normering waarbij leerlingen bij x punten of hoger een etiket 'hoogbegaafd' opgeplakt krijgen. Wat men tracht te bereiken is leerlingen aan te moedigen hun wiskundig inzicht en creativiteit te gebruiken om opgaven op te lossen die net anders zijn dan wat ze gewend zijn. Leerlingen worden aangemoedigd hun pogingen te noteren; het opgavenblad is ook bestemd als kladpapier. Deelname aan de test is vrijwillig, docenten of scholen geven op welke leerlingen meedoen. Docenten krijgen een overzicht van de prestaties van hun leerlingen en van de landelijke resultaten. De test kan en wil niet meer zijn dan een van de hulpmiddelen die docenten gebruiken om *inzicht* te krijgen in het potentieel van hun leerlingen, met name de wiskundige creativiteit die leerlingen op een zeker moment vertonen.
De opgaven kunnen tevens worden gebruikt als *verrijkingsmateriaal* voor begaafde leerlingen. In díe functie vormen de opgaven materiaal waarmee leerlingen aangemoedigd worden een onderzoekende, probleemoplossende houding verder te ontwikkelen. In welke mate dat systematisch gebeurt is in dit stadium in hoge mate afhankelijk van de didactische en pedagogische competenties van de docent.

Pilot in Nederland

In de maanden na de conferentie ontstond het idee om een verkenning in Nederland uit te voeren met dit toetsmateriaal om te kijken of:
- er in Nederland belangstelling bestaat voor dit type

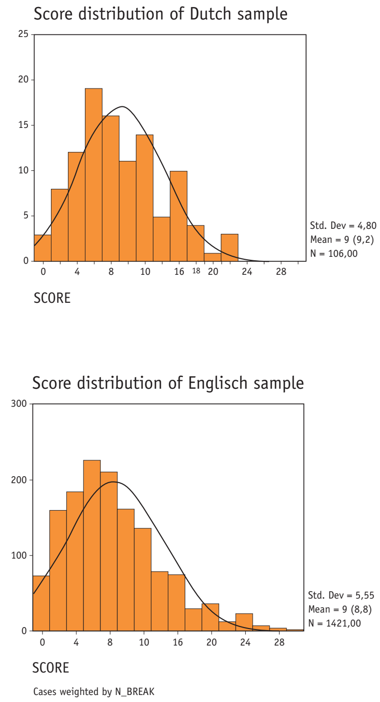
23 25 17 21 ? ?

The mean of this set of six numbers is 22 and the range is 14

Find the two missing numbers.

__________ and __________

FIGUUR 1 Opgave 8



FIGUUR 2

opgaven en toetsen, zowel bij leerlingen als docenten;
- het vertaalde Engelse materiaal geschikt is voor de Nederlandse situatie;
- er belangrijke verschillen zijn met een vergelijkbare groep Engelse leerlingen.

Na overleg met de Engelse collega's en na oriëntatie binnen Nederland besloten we dat er een pilot zou komen voor leerlingen van de basisvorming, overeenkomend met de Engelse testgroep van 13-jarigen. Voor de SLO hoort deze pilot tot het deelproject *Hoogbegaafdheid en Wiskunde*, van Pieter van der Zwaart en Jenneke Krüger. De test is op 10 scholen afgenomen in maart 2003.

Organisatie

De Engelse collega's kozen 15 opgaven uit verschillende testen voor de groep 13-jarigen. Die opgaven werden door ons bekeken op geschiktheid voor leerlingen van de basisvorming en ze werden in het Nederlands vertaald. Uitgangspunt was dat leerlingen in staat moeten zijn om met wiskunde van de basisvorming de opgaven op te lossen, maar dat de opgaven niet noodzakelijk bij de leerstof in de gangbare schoolboeken hoeven aan te sluiten. De termen moesten natuurlijk wel bekend zijn; een vraag waarin het woord 'priemgetallen' of 'spreidingsbreedte' voorkomt kan niet letterlijk vertaald worden. Er hoefde maar een enkele keer een omschrijving bedacht worden (zie figuur 1).

Ook in de meeste Nederlandse opgaven werd van de leerlingen gevraagd op te schrijven hoe ze aan hun antwoord komen.

We spraken af dat er tussen de 50 en 100 leerlingen mee konden doen aan de test. Net zoals in Engeland verliep de aanmelding van leerlingen via docenten. Docenten werden uitgenodigd voor deelname via de mailinglist *Wisenslim*[4] en de *WiskundEbrief*[5]. Er was zoveel belangstelling dat we na een week besloten het aantal leerlingen per docent te beperken tot maximaal 10.

Nadat 106 leerlingen aangemeld waren door in totaal 10 docenten is de inschrijving gesloten. Helaas moesten we een aantal mensen teleurstellen die ook mee hadden willen doen.

De test

Bij een wiskundetest die gericht is op het signaleren van creativiteit is het belangrijk dat leerlingen ontspannen kunnen werken, zonder het gevoel te krijgen dat er een belangrijke beoordeling volgt. We hebben de docenten gevraagd de leerlingen ongeveer 60 minuten voor de test te geven, niet minder, en uitgelegd dat aan de test geen consequenties verbonden kunnen worden voor individuele leerlingen, zeker gezien het experimentele karakter.

Leerlingen schreven antwoorden en eventuele berekeningen, uitleg, etc. in het testboekje. In principe waren de 15 opgaven oplopend in moeilijkheidsgraad. Geïnteresseerden kunnen de testopgaven binnenhalen via de SLO-website 'hoogbegaafdheid'.[6]

Resultaten

We waren natuurlijk, net zoals docenten en leerlingen, erg benieuwd naar de resultaten en naar de vergelijking met de Engelse groep. Eind mei konden we de docenten van de verschillende scholen niet alleen de resultaten van hun leerlingen sturen, maar ook wat informatie over de totaalresultaten en een vergelijking met de Engelstalige groep. Alle docenten kregen toen ook een vragenlijstje toegestuurd om te trachten enkele punten op te helderen.

In de eerste plaats lijkt het er op dat tussen de Nederlandse en Engelse groep over het geheel

De som van opeenvolgende getallen vertoont een regelmaat.

$$1 + 2 = 3 \times 1$$

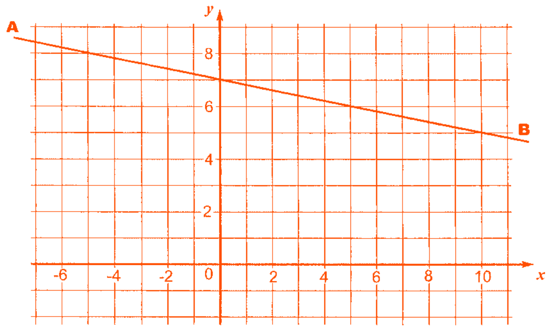
$$1 + 2 + 3 = 4 \times 1\tfrac{1}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 5 \times 2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 6 \times 2\tfrac{1}{2}$$

Deze regelmaat houdt aan.

Wat is het kleinste aantal opeenvolgende getallen, te beginnen met 1, waarvan het antwoord **groter is dan 1000** als je ze bij elkaar optelt.



De lijn AB snijdt de y-as in (0,7).

De lijn wordt doorgetrokken tot hij de x-as snijdt.

Wat zijn de coördinaten van het punt waar AB de x-as snijdt?

FIGUUR 3 Opgave 3 en opgave 4

genomen geen belangrijk verschil is wat betreft de totale score (zie figuur 2).

Sommige opgaven zijn in Nederland beter gemaakt, andere in Engeland. Dat valt voor een deel terug te voeren op verschillen in het programma. Opgave 3 werd bijvoorbeeld in Engeland wat beter gemaakt, opgave 4 werd in Nederland beter gemaakt (zie figuur 3).
Een opvallend verschil is dat Engelse leerlingen meer geneigd lijken te 'proberen'; ze schrijven vaker pogingen op. Bij Nederlandse leerlingen zie je vaker dat aan een opgave niet eens begonnen wordt. Een opgave als
Vind de waarde van x in de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}\cdot(3x+5)=\tfrac{1}{4}\cdot(7x-2)$$

wordt door Engelse leerlingen vaker op een informele manier geprobeerd, bij Nederlandse leerlingen schrijven de meesten slechts dan iets op als ze de formele oplossingsmethode weten. Ook lijken Engelse leerlingen meer van hun pogingen 'in klad' op te schrijven dan Nederlandse leerlingen. Die laten gemiddeld minder zien van hun manier van redeneren, het werk is 'netter' en geeft minder informatie.
Figuur 4 geeft voorbeelden van leerlingenwerk waaruit wèl de manier van redeneren blijkt.

Er is ook gekeken naar eventueel verschil in resultaten op basis van geslacht.
In Engeland was er bij acht opgaven een significant verschil in resultaat tussen jongens en meisjes, steeds in het voordeel van jongens. In Nederland was er alleen bij opgave 9 (zie figuur 5) een significant verschil; ook daar deden de jongens het beter.
De opgaven waren bedoeld om oplopend in moeilijkheidsgraad te zijn. Dan verwacht je dat het percentage correcte antwoorden afneemt met oplopend nummer van de opgave. Dat blijkt zowel in Engeland als Nederland niet helemaal te kloppen.
In figuur 6 is te zien dat opgave 4 voor Nederlandse leerlingen het eenvoudigst was, terwijl opgave 11 (zie figuur 7) als geheel voor diezelfde groep het moeilijkst was. Nederlandse leerlingen gingen bij deze opgave aan het meten, terwijl dat niet de bedoeling was.

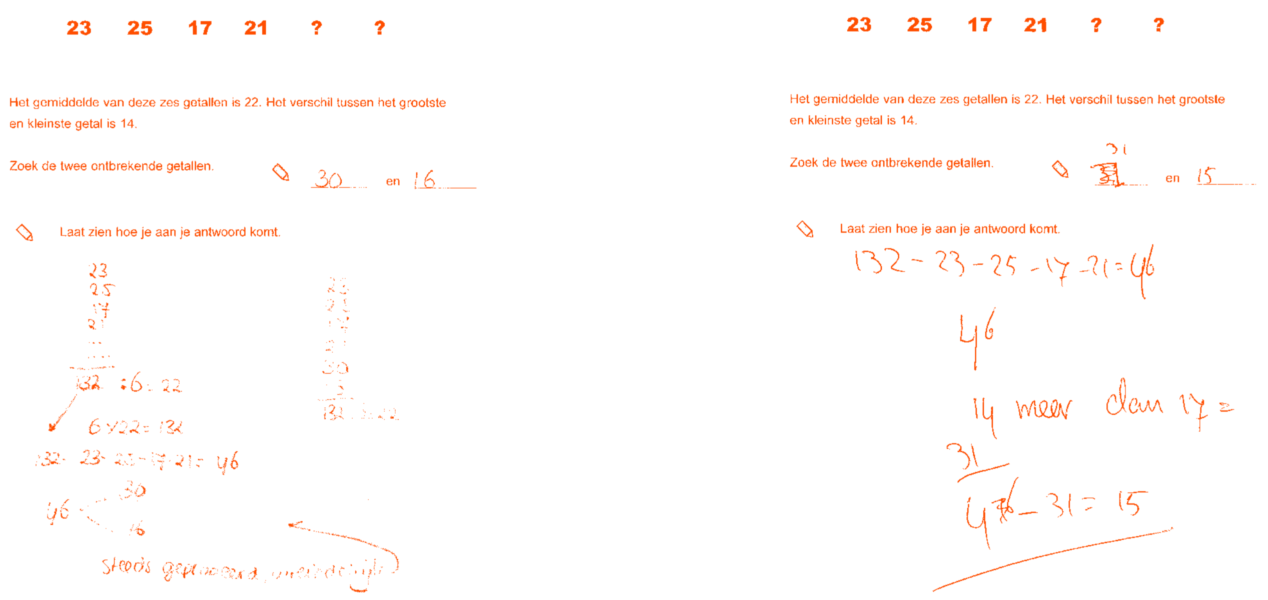
Reacties van docenten en leerlingen

Hoe vonden leerlingen het om een uur aan dit soort opgaven te werken? Volgens informatie van de docenten vonden de meeste leerlingen het leuk, maar vonden ze de opgaven moeilijk. Een uur vonden sommige leerlingen te kort om goed over de opgaven na te denken. De reactie van docenten op de serie opgaven was gemengd: sommigen vonden het toch vooral een kennistest, anderen vonden het leuke opgaven.
Waren de prestaties van de leerlingen zoals verwacht? Vaak wel, zie onderstaande tabel.

Afwijking van verwachte prestaties

	meisjes (n=45)	jongens (n=61)
beter dan verwacht	8,5%	6,6%
slechter dan verwacht	10,6%	19,8%

Gevraagd naar een mogelijke verklaring voor het minder vaak opschrijven van 'probeersels' door Nederlandse leerlingen gaven docenten onder meer als mogelijke oorzaken: de cultuur in de basisschool (veel invuloefeningen); de antwoordgerichtheid van het onderwijs in het algemeen; het excessieve gebruik van



FIGUUR 4

de rekenmachine; leerlingen bedenken eerst wat ze willen doen en gaan daarna pas opschrijven; leerlingen durven geen kladwerk te tonen.

Voor het opvallende verschil in prestaties tussen jongens en meisjes bij opgave 9 (zie figuur 5) had geen van de docenten een verklaring.

De docenten is ook gevraagd per opgave aan te geven of deze aansloot bij de lesstof van het eerste of tweede leerjaar, of helemaal los stond van het lesprogramma. Daarover bleken nogal wat verschillen van mening te bestaan. Een voorbeeld is opgave 3 (zie figuur 3). Dit probleem wordt door drie docenten beschouwd als aansluitend bij de lesstof van leerjaar 1, twee docenten vinden deze opgave goed in de lesstof van het tweede leerjaar passen en nog eens vier docenten vinden het probleem helemaal buiten de lesstof staan.

Bespreking van resultaten

Zijn de vragen die we aan het begin van dit projectdeel stelden beantwoord?

Bestaat er in Nederland belangstelling voor dit type opgaven in testen?

Dat lijkt er wel op. Er was ruim belangstelling om mee te doen, we moesten de inschrijving beperken, zowel wat betreft het aantal scholen als wat betreft het aantal leerlingen per school.

Is het vertaalde Engelse materiaal geschikt voor de Nederlandse situatie?

Op drie momenten is dat aan de orde geweest. Na de selectie van opgaven door Engelse collega's hebben we de opgaven bekeken op geschiktheid. Alle 15 opgaven zijn gebruikt voor de test. Vervolgens zou bij vertaling kunnen blijken dat opgaven niet goed in gangbaar Nederlands te vertalen waren, wat betreft wiskundige begrippen. Ook daar waren geen echte problemen. Tenslotte had uit de testresultaten kunnen blijken dat het materiaal niet geschikt was. We hebben de docenten gevraagd naar hun oordeel over het taalgebruik van de opgaven; daar kwam geen kritiek van betekenis op. De resultaten van de Nederlandse en van de Engelse groep vertoonden geen opvallende verschillen. We kunnen dus aannemen dat dit type opgaven in deze vorm geschikt is voor gebruik in Nederland.

Zijn er belangrijke verschillen met een vergelijkbare groep Engelse leerlingen?

Voor de testresultaten als geheel niet, wel zijn er op onderdelen verschillen geconstateerd.

Als je per opgave kijkt naar verschil in resultaten tussen beide landen, kunnen de meeste verschillen verklaard worden op basis van leerplan. Bijvoorbeeld een opgave waarin gevraagd wordt hoeken te berekenen zal slechter gemaakt worden als leerlingen nog niets over hoeken hebben gehad. Opgaven waarin leerlingen op basis van patronen konden redeneren (zie figuur 3) werden in Engeland beter gemaakt, waarschijnlijk omdat dergelijke activiteiten meer in het Engelse lesprogramma voorkomen.

Het veel slechtere Nederlandse resultaat bij opgave 9 (zie figuur 5) wordt geheel veroorzaakt door de opvallend slechte prestaties van de Nederlandse meisjes, de enige opgave waar in de Nederlandse groep een significant verschil bestaat tussen jongens en meisjes. Daarvoor hebben we geen verklaring, ook de docenten hebben hier geen verklaring voor.

De meest opvallende verschillen met de Engelse groep zijn verder:

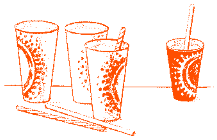
- Nederlandse leerlingen schrijven vaker helemaal niets op als ze de opgave te moeilijk vinden, ze laten niet zien dat ze iets geprobeerd hebben.

Een grote milkshake kost 35 cent meer dan een kleine milkshake.

Hannah koopt 1 grote en
4 kleine milkshakes.



Jake koopt 3 grote milkshakes
en 1 kleine.

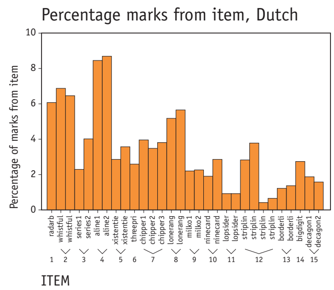


Ze betalen allebei **hetzelfde** bedrag.

Bereken de prijs van een **kleine** milkshake.

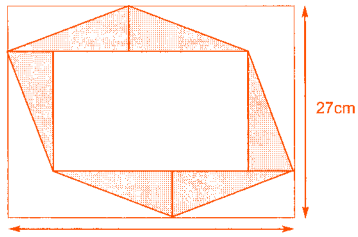
Laat zien hoe je aan je antwoord komt.

FIGUUR 5 Opgave 9



FIGUUR 6

Hier is een zeshoek samengesteld uit zes dezelfde driehoekige figuren, binnen een rechthoek.



Bereken de oppervlakte van **één** of de driehoekige figuren.

FIGUUR 7 Opgave 11

- Ook als er een goed antwoord staat laten Nederlandse leerlingen minder van hun manier van redeneren zien; bij veel leerlingen moet ook het klad netjes zijn lijkt het.

Vervolg

Als dergelijke series opgaven beschikbaar zouden komen voor het Nederlandse onderwijs, kunnen ze gebruikt worden als *één* van de hulpmiddelen om begaafdheid bij leerlingen te onderkennen. Duidelijk moet zijn dat er geen absolute normering aan gekoppeld is; zoals ik in mijn inleiding aangeef kunnen de opgaven op zichzelf niet gebruikt worden om leerlingen in een vakje te plaatsen. De opgaven zijn bovendien goed te gebruiken als kant en klaar materiaal voor begaafde leerlingen, met name voor het stimuleren van een onderzoekende, probleem-oplossende attitude. Bij veel docenten bestaat grote behoefte aan meteen in te zetten materiaal.

Deze pilot roept een aantal vragen op voor verder onderzoek:

- Is er bijvoorbeeld verschil in prestaties tussen jongere en iets oudere leerlingen? Daarvoor moet je een grotere onderzoeksgroep hebben dan de 106 leerlingen die we nu hadden.
- Hoe zit het met dat relatief weinig in klad schrijven bij Nederlandse leerlingen? Is dat een toevallig verschijnsel bij deze groep? Als dat niet zo is, heeft het gevolgen voor de wijze waarop leerlingen problemen oplossen? Waardoor wordt het veroorzaakt?
- Als we zo'n test in de Engelse taal zouden verspreiden, vormt dat dan een extra uitdaging voor begaafde leerlingen? In februari was er tijdens een werk-bijeenkomst op de SLO een workshop voor leerlingen waar dergelijke opgaven in het Engels gepresenteerd werden en de aanwezige leerlingen waren enthousiast. Als scholen hier belangstelling voor hebben is dat een mogelijkheid voor een vervolgactiviteit.
- Een andere mogelijkheid zou zijn, een deel van de test of de hele test digitaal aan te bieden. Ook dat vinden veel leerlingen geweldig, maar geldt dat voor alle (hoog)begaafde leerlingen?

Reacties, vragen of suggesties van docenten en school-management ontvangen we graag.

Opmerking

Het citaat in de kop van het artikel is vrij naar: J. Threlfall en P. Pool, Promoting Creativity through Assessment. In: Proceedings International Conference on Creativity in Mathematics Education, Riga, 2002.

Noten

[1] T. Mooij, e.a.: Onderwijs aan hoogbegaafde kinderen. Muiderberg, 1991.
[2] J. Krüger: Creatief wiskundeonderwijs en onderwijs aan begaafde leerlingen, in: Euclides 78-6 (april 2003).
[3] Zie www.worldclassarena.org
[4] Zie http://listserv.slo.nl/mailman/listinfo/wisenslim
[5] Zie www.digischool.nl/wi/WiskundE-brief
[6] Zie www.slo.nl/hoogbegaafd

Over de auteur

Jenneke Krüger (e-mailadres: j.kruger@slo.nl) werkt sinds 2001 bij de afdeling Voortgezet Onderwijs van de SLO, Enschede. Tot 1 augustus 2003 gaf ze les in biologie, wiskunde en ANW op verschillende scholen. Ze is o.a. lid van de werkgroep havo/vwo van de NVvW en bestuurslid van de sectie ANW van de NVON.

WIMECOS

Aan de leden van Wimecos.

Op 27 december 1963 zal de jaarlijkse ledenvergadering van onze vereniging gehouden worden. Het is ons opgevallen dat de vergaderingen voor het merendeel door de oudere, doorgewinterde docenten worden bijgewoond die met veel interesse de talloze didactische problemen die te berde worden gebracht, beluisteren en bespreken.

Vooral met het oog op de grote veranderingen die in ons wiskundeonderwijs te verwachten zijn, worden deze problemen steeds moeilijker. Des te verontrustender is het, dat een opvallend groot deel van de collega's en speciaal de jongeren, betrekkelijk weinig gebruik maakt van de mogelijkheden tot gedachtenwisseling op onze samenkomsten. Het ledental van Wimecos bedraagt thans ongeveer 650 en het is niet ongewoon dat slechts 10 % hiervan de ledenvergaderingen bezoekt. Wij vragen ons af wat de oorzaken hiervan kunnen zijn. Is het de datum die meestal in de Kerstvakantie valt? Of kost de reis naar Utrecht te veel tijd? Bestaat er bij velen een vergadermoeheid? Een zekere lauwheid t.a.v. ons vak lijkt ons uitgesloten.

Het bestuur heeft naar een oplossing voor dit probleem gezocht. We hebben gedacht aan splitsing van de samenkomsten in verschillende delen van ons land. Ook hebben we overwogen bepaalde excursies te verbinden aan onze vergaderdagen. Deze koersveranderingen gaan echter gepaard met budgetverhogingen, zodat op de eerstvolgende bijeenkomst op 27 december enige tijd gereserveerd zal worden om over een en ander te discussiëren. Wellicht komen we zo tot een positief resultaat.

Elders in dit nummer van Euclides staat vermeld wie de sprekers zijn en welke wetenschappelijke en didactische onderwerpen door hen worden behandeld. Men zal constateren, dat het hier gaat over zeer moderne stromingen in de didactiek. Iedere aanwezige zal in de gelegenheid zijn vragen te stellen aan de bij uitstek deskundige sprekers.

Moge deze aanbeveling er toe bijdragen om vele leden op te wekken naar Utrecht te komen en te getuigen van hun actieve belangstelling voor ons mooie vak.

Namens het bestuur,

B. Groeneveld (voorz.)
J. F. Hufferman (secr.)

Aanbeveling door het bestuur van Wimecos in Euclides, jaargang 39 (1963-1964).

N.B. Wimecos (een afkorting van wiskunde/mechanica/cosmografie) was de voorloper van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Zie hiervoor het hoofdstuk 'De vereniging en het tijdschrift' van Jan Maassen in Honderd jaar wiskundeonderwijs (2000).

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

Bankroet

[Rob Bosch]

Een bekend gokspelletje is het volgende: Twee spelers gooien om de beurt een muntstuk op. Bij munt betaalt de eerste speler een euro aan de ander en bij kop ontvangt hij een euro van zijn tegenstander. Het spel duurt totdat een van de spelers bankroet is. Stel dat een van de spelers het spel met slechts 1 euro begint terwijl de tweede speler over een beginkapitaal van 50 euro beschikt, hoe groot is dan de kans dat de armste speler aan het eind van de dag 50 euro gewonnen heeft, en hoe lang zal zo'n spelletje gemiddeld duren?

De bovenstaande opgave staat bekend als het *gambler's ruin* probleem. Dit probleem kunnen we met behulp van differentievergelijkingen eenvoudig oplossen.
We gaan uit van twee spelers A en B die een beginkapitaal hebben van respectievelijk a en b euro.
De kans dat een speler met beginkapitaal k al zijn geld kwijt raakt, geven we aan met $P(k)$. Na één ronde is de kans dat het kapitaal gereduceerd wordt tot $k-1$ gelijk aan $\frac{1}{2}$. De kans dat het kapitaal toeneemt tot $k+1$ is ook gelijk aan $\frac{1}{2}$. De kans dat een speler bij een kapitaal van k al zijn geld verliest, is dus gelijk aan

$$P(k)=\tfrac{1}{2}P(k-1)+\tfrac{1}{2}P(k+1),\ 1\leq k\leq a+b-1 \qquad (1)$$

De beginvoorwaarden voor deze differentievergelijking zijn $P(0) = 1$ en $P(a + b) = 0$.
Als we de vergelijking (1) schrijven als

$$\tfrac{1}{2}P(k+1)-\tfrac{1}{2}P(k)=\tfrac{1}{2}P(k)-\tfrac{1}{2}P(k-1) \qquad (2)$$

zien we dat we te maken hebben met een eenvoudige rekenkundige rij $P(k)$. Er geldt dus:
$P(k)=ck+P(0)$
Substitutie van de beginvoorwaarden geeft
$P(a+b)=0=c(a+b)+1$
waaruit volgt dat

$$c=-\frac{1}{a+b}$$

Voor de kansen $P(k)$ vinden we zo

$$P(k)=-\frac{k}{a+b}+1$$

De kans dat een speler met beginkapitaal a al zijn geld verliest aan een tegenstander met een kapitaal b, is dus gelijk aan

$$P(a)=-\frac{a}{a+b}+1=\frac{b}{a+b} \qquad (3)$$

De kans dat ik met 1 euro de 50 euro van mijn tegenstander win, is gelijk aan $\frac{1}{51}$.
Uiteraard geeft (3) in het geval van $a=b$ een kans van $\frac{1}{2}$.
Merk verder op dat $P(a)+P(b)=1$, zodat de kans dat het gokken eindeloos doorgaat, gelijk is aan 0.

Voor de verwachte duur D van het spelletje kunnen we een soortgelijke vergelijking als (1) opstellen.
Zij $D(k)$ de gemiddelde duur van het spel bij een beginkapitaal k van een van de spelers.
Met een kans van $\frac{1}{2}$ zal het kapitaal na één ronde gelijk zijn aan $k+1$, waarna het spelletje gemiddeld $D(k+1)$ ronden duurt. Evenzo zal na een ronde met kans $\frac{1}{2}$ het kapitaal teruggebracht zijn tot $k-1$ waarna er gemiddeld nog $D(k-1)$ ronden gespeeld zullen worden. Voor de gemiddelde duur $D(k)$ kunnen we dus de volgende vergelijking opstellen:

$$D(k)=\tfrac{1}{2}D(k+1)+\tfrac{1}{2}D(k-1)+1,\ 1\leq k\leq a+b-1 \qquad (4)$$

De beginvoorwaarden zijn hier $D(0) = D(a + b) = 0$.
Door de 1 in het rechterlid is de differentievergelijking niet meer homogeen.
De homogene vergelijking

$$D(k)=\tfrac{1}{2}D(k+1)+\tfrac{1}{2}D(k-1) \qquad (5)$$

is op de beginvoorwaarden na gelijk aan vergelijking (1). Voor de oplossing vinden we dus weer

$$D(k)=ck+D(0)=ck \qquad (6)$$

Nu moeten we nog een een zogenoemde particuliere oplossing van vergelijking (4) vinden. Uit $-2k^2=-(k+1)^2-(k-1)^2+2$ volgt dat $D(k)=-k^2$ een oplossing is van vergelijking (4). De algemene oplossing van de differentievergelijking (4) is dus

$$D(k)=-k^2+ck \qquad (7)$$

Substitutie van de beginvoorwaarde $D(a+b)=0$ geeft $0=-(a+b)^2+c(a+b)$, waaruit volgt dat $c = a + b$, en dus vinden we

$$D(k)=-k^2+(a+b)k \tag{8}$$

Als twee spelers met beginkapitalen a en b het gokspelletje spelen, dan is de gemiddelde duur van het spelletje gelijk aan

$$D(a)=D(b)=-a^2+(a+b)a=ab \tag{9}$$

Beschikken beide spelers over 20 euro, dan zal het spel gemiddeld 400 worpen vergen. Met 1 euro heb ik weliswaar een kans van ongeveer 98% om deze tegen een persoon met 50 euro te verliezen, maar gemiddeld zal het spel 50 beurten duren.

Als we bedenken dat je in de helft van de gevallen de ene euro al na één ronde kwijt bent, dan zien we dat je aan die ene euro nog een hoop plezier kunt beleven.

Literatuur

William Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications (John Wiley & Sons, 1950).

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

Verschenen / Rekenmeesters 1



Grondbeginselen der Rekenkunde. Een rekenboek uit 1828, uitgegeven door het wiskundig genootschap 'Mathesis Scientiarum Genitrix' te Leiden
Ingeleid door Danny Beckers en Harm Jan Smid
Uitgever: Uitgeverij Verloren, Hilversum
isbn 90 6550 744 2
prijs: € 16,00

Onlangs verscheen het eerste deel van de serie 'Rekenmeesters', een reeks historische lesboeken rekenen/wiskunde onder redactie van Danny Beckers, Marjolein Kool en Harm Jan Smid. In deze reeks komt het reken- en wiskundeonderwijs uit vervlogen tijden weer tot leven in de vorm van facsimile-uitgaven van Nederlands belangrijkste oude lesboeken. Elk deeltje van de serie wordt tevens voorzien van een inleiding die het boek in een cultuur- en onderwijshistorische context plaatst.

Het eerste deeltje bevat de facsimile van het rekenboekje *'Grondbeginselen der Rekenkunde'* uit 1828. Het eerste exemplaar van deze uitgave werd op 26 september jl. officieel uitgereikt aan de president van de Algemene Rekenkamer, mevrouw Saskia Stuiveling. Dit gebeurde aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, in de pauze van het 12e KUN-wiskundetoernooi, een wedstrijd voor leerlingen van 4- en 5-vwo. Alle deelnemers ontvingen een exemplaar.

De redactie is inmiddels gestart met het tweede deeltje, het bekende rekenboek van Willem Bartjens.

STROKEN MET ETIKETTEN

Gebruik van een applet en eigen lesmateriaal in plaats van hoofdstukken uit het boek. Succesvolle ervaringen in klas 1.

[David Dijkman en Martin van Reeuwijk]

Inleiding

Twee jaar achter elkaar is op het St. Michael College te Zaandam het applet *Stroken met Etiketten* ingezet bij het onderwerp *Verbanden Vergelijken* in de eerste klas van het havo/vwo. Bij dit applet is zelf lesmateriaal ontwikkeld, dat grotendeels de inhoud dekt van de hoofdstukken 12 en 14 uit 'Moderne wiskunde' en voor een deel ook hoofdstuk 10. Het is hoog tijd om met onze bevindingen naar buiten te treden, want voor ons is één ding duidelijk: *Stroken met Etiketten* kan voor het wiskundeonderwijs een enorme verrijking betekenen, ook voor gebruikers van andere methoden!

Achtergrond

Sinds de 7e editie van 'Moderne wiskunde' (Wolters-Noordhoff, 1998) ervaren wij op het St. Michael College (SMC) in klas één een grotere tijdsdruk om het programma af te krijgen, terwijl er amper nieuwe leerdoelen bij zijn gekomen. Het onderwerp lineaire verbanden bijvoorbeeld is in de zevende editie uitgesmeerd over meer hoofdstukken terwijl er nauwelijks sprake is van extra diepgang. Om die diepgang wel te kunnen bereiken zonder dat daar extra lessen voor nodig zijn, hebben we zelf lesmateriaal ontwikkeld als alternatief voor de hoofdstukken 12 en 14 (vergelijken en vergelijkingen) en deels hoofdstuk 10 (formules). Goed materiaal komt immers in plaats van en niet nog eens boven op het bestaande materiaal! Het doel was vervangend materiaal te ontwikkelen voor hoofdstukken over vergelijkingen en formules. In 'Moderne wiskunde' zijn dat de hoofdstukken 10, 12 en 14, maar het materiaal kan ook bij andere methoden gebruikt worden.

WisWeb, WELP, applets

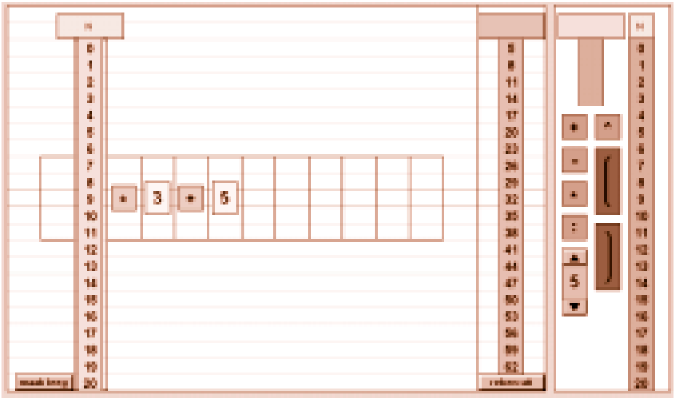
Het SMC is één van de scholen die meedraaide in het *WisWeb-project*. De school doet nu ook mee in het implementatieproject *WELP (Wisweb En Lessen Praktijk)*. In deze projecten draait het om het ontwikkelen en implementeren van onderwijs dat gebaseerd is op applets. Er is gekozen voor een mengvorm van werkbladen en computeractiviteiten, voor computerlessen afgewisseld met 'gewone' lessen. Deze keuze is onder andere ingegeven door de praktische beschikbaarheid van het computerlokaal. De verhouding ligt in het WELP-materiaal ongeveer op 1 computerles naast 2 gewone lessen. Het hele lesmateriaal is echter wel gebaseerd op de applets en maakt gebruik van de modellen en vaardigheden die in de applets centraal staan. In het WELP-project beperken we ons tot de algebra, omdat dit een lastig onderwerp is in de onderbouw en omdat applets dankzij de dynamiek, interactiviteit en visuele kracht de algebraïsche begripsontwikkeling en het leren van (algebraïsche) vaardigheden kunnen ondersteunen.

De ervaringen die in beide projecten zijn opgedaan, de applets en het ontwikkelde lesmateriaal zijn allemaal beschikbaar op de WisWeb-site (*www.wisweb.nl*). Ook het lesmateriaal en uitgebreide lesverslagen, waaronder foto's, waar we in dit artikel gebruik van maken, zijn op de WisWeb-site te vinden.
Het applet dat centraal stond in het lesmateriaal over verbanden vergelijken, is *Stroken met Etiketten*[1]. Dit is een applet waarmee je een serie getallen kunt maken met een zekere regelmaat. De getallen worden verticaal weergegeven in een strook. Je kunt op verschillende manieren een strook getallen krijgen:
- door een formule in te tikken in het etiketvak boven de strook;
- door met stroken te rekenen en nieuwe stroken te maken.

Als je bijvoorbeeld de strook N (natuurlijke getallen 0,1,2,...) keer drie doet en er daarna vijf bij optelt, en op de knop 'reken uit' klikt, krijg je de strook 5,8,11,14,17,20,... (zie figuur 1).
Een bijbehorend etiket is $3N + 5$. Het applet geeft het etiket van de resultaatstrook niet. Dat moet je zelf intypen. Het applet controleert vervolgens of je de juiste expressie hebt ingevoerd.

Eigen strategieën

In 'Moderne wiskunde' worden in hoofdstuk 12 vooral de dubbele tabel en de grafiekmethode gebruikt om verbanden met elkaar te vergelijken. In hoofdstuk 14 komen de bordjesmethode en het terugrekenen aan de orde. Vergelijkingen van het type $ax + b = cx + d$ worden nog even uitgesteld. Met ons eigen



FIGUUR 1 Schermafdruk van Stroken met Etiketten

(contextrijke) materiaal krijgen de leerlingen meer ruimte (of worden ze meer gestimuleerd) om met eigen strategieën te komen. Leerlingen komen – gestimuleerd door de opdrachten - dan ook *zelf* tot aanpakken om te berekenen wanneer een 'gelijkspel' wordt bereikt. Deze aanpakken lijken op de dubbele tabel en de grafiek-methode, en dat geeft mooie aanknopingspunten om tijdens de les verschillende aanpakken met elkaar te vergelijken.
Met de stroken leren leerlingen expressies (formules) te vinden, ze te vergelijken en ermee te rekenen. De stroken kunnen als dubbele tabel gebruikt worden en vormen een sterk model bij het vinden van de verschillen tussen twee formules. Het applet wordt gebruikt naast de andere strategieën (inzoomen in de tabel, grafisch oplossen van een vergelijking, bordjes-methode) en niet in plaats van. Verderop in het onderwijs (leerjaren 2 en 3) komen de andere strategieën expliciet aan bod - ook met applets overigens.
Bij het vergelijken van de verschillende aanpakken komt ook de methode van het kleiner wordend verschil (inhalen of ontmoeten) snel ter sprake. Deze slaat goed aan bij vrijwel alle leerlingen. Een 8 euro duurder abonnement voor een mobieltje is al na 40 minuten terugverdiend als je bij dat abonnement 20 eurocent per minuut minder betaalt. En 1 kilometer overbrug je binnen 2 minuten als je beiden met een snelheid van 15 km/u elkaar tegemoet fietst.
Waarom dan toch een nieuw model op de computer introduceren als 'oude' aanpakken voldoen? Wat is de meerwaarde van stroken met etiketten?

Stroken, tabellen en rekenmachine

Voordat we ingaan op de ervaringen met *Stroken met Etiketten* moeten we vertellen dat we bij hoofdstuk 7 (regels ontdekken) ook een stroken-applet hebben ingezet. Dit was een variant van *Stroken met Etiketten,* maar dan zonder etiketten. Het strokenmodel was dus niet helemaal nieuw voor de leerlingen. Ze hebben al mogen ervaren dat je met stroken een soort mega-rekenmachine hebt, die een heleboel waarden tegelijk kan uitrekenen. Dit in tegenstelling tot de gewone rekenmachine, waarbij je, om een tabelletje af te maken, telkens dezelfde knopjes moet indrukken. Het applet *Stroken* kan dus een hoop rekenwerk uit handen nemen. Wel moet vermeld worden dat niet alle leerlingen direct de relatie leggen tussen de tabel en stroken. Achterliggende oorzaak is waarschijnlijk dat in het applet stroken verticaal worden weergegeven en in het boek tabellen vaak horizontaal.

Leerlingen aan het werk

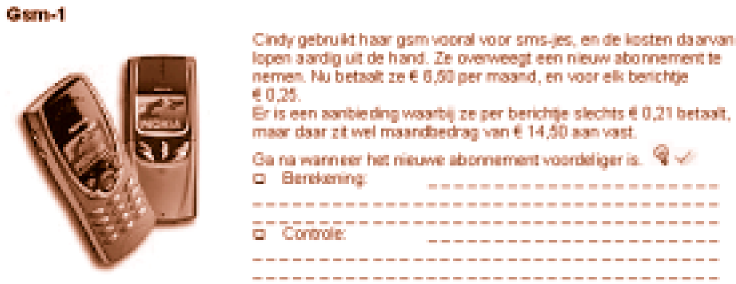
Als de leerlingen met het applet aan de slag gaan, gebeurt er veel. Als docent kun je lang niet alles zien, maar gelukkig is er in het WELP-project zo nu en dan iemand in de klas die helpt observeren. Onderstaande impressie van twee leerlingen die met opdracht 3 (zie figuur 3) aan de slag zijn, geeft een indruk van de manier van werken en de wiskunde die er gebezigd wordt. De twee leerlingen (1 en 2) zijn bezig met opgave 3a en de extra kracht (obs, observerend onderzoeker) loopt rond. De tekst tussen blokhaken is commentaar van de participerende en observerende onderzoeker van het Freudenthal Instituut.

1: Nou kijk, je moet de formule 5 keer *n* plus 27 ...
zo ... en dan pak je die ...
[Pakt strook *N* en sleept daarna * en 5 naar het werkveld links]
En dan doe je plus ... 27 ... en dan ... moet je nog zo'n ding maken.
Maar hoe zet je hem [de resultaatstrook] in het bewaarvak?
2: Dan moet je hem daarheen [wijst naar de rechterkant van het scherm, het bewaarvak] slepen.
1: Dan gaan we hem weer leegmaken.

De leerlingen proberen vervolgens de strook een naam te geven.

1: Dit is: 5 keer *n* plus 27 [leerlingen typen dit in het etiket]
Obs: Wat doe je dan om te kijken of ie goed is?
1: Dan druk je op Enter en dan wordt ie groen en dan is ie goed.

De volgende strook...



FIGUUR 2 Een opgave uit het lesmateriaal Verbanden vergelijken

1: Wat moeten we nou doen?
2: 7 keer nummer - ik weet het allemaal heel goed -
1: Dat is ook voor het eerst.
2: Min 23, dit is vet simpel dit. Dit wel, de rest snap ik geen reet van.
Wacht we moeten de formule nog.
[Leerlingen toetsen de formule ‘7n - 23’ in het etiket in]
Obs: Is ie goed?
1: Ja!

Deze korte impressie is tekenend voor hoe makkelijk en snel leerlingen vertrouwd raken met het applet en voor het type gesprekken die leerlingen voeren. Er wordt gepraat en beschreven wat er gebeurt.
In het volgende fragment wordt de wiskunde lastiger.

Obs: Ga maar door. Wat moeten jullie doen?
1: We moeten twee van die dingen maken en naast elkaar zetten.
2: Ik sleep hem daar heen... Nee die moet eerst.

De leerlingen zetten de stroken $5N + 27$ *en* $7N - 23$ naast elkaar op het werkveld.

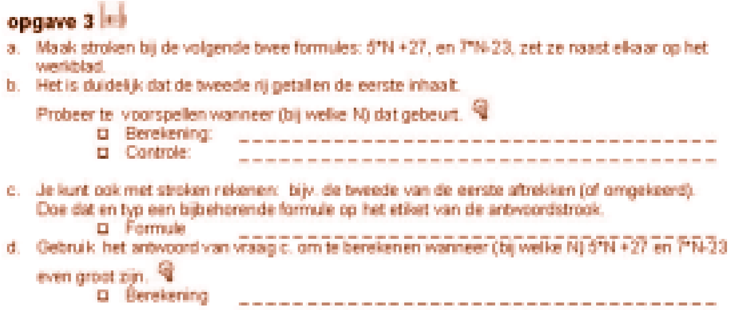
1: Hij haalt hem helemaal niet in. O ja, toch wel.
[De leerlingen scrollen in de stroken naar beneden door het begingetal te veranderen]
2: Hij haalt hem bij die ... die nee die ...
[Ze gaan met hun vingers over het scherm over de stroken]
Obs: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
1: Oh 157,
[Bij die waarde heeft de ene strook de andere voor het eerst ingehaald]
Obs: Bij welke n? Zet de n-strook er maar eens naast.
2: Hee, daar waren we nog niet achter, dat is slim.
1: Nummer 26.
2: Yups!

Ze schrijven hun antwoorden op en gaan verder met opgave 3c. Eerst wordt het scherm leeggehaald. De leerlingen hebben nu twee stroken en die gaan ze van elkaar aftrekken. Vervolgens typen ze in het etiket van de resultaatstrook:

1: 5 sterretje n plus 27 min ... 7 keer n ... min 20.
Obs: Hij klopt niet, waarom niet?
2: Nou, het is gewoon die strook min die strook.
1: Kan je niet gewoon [en dit typt ze in] ‘strook 1 min strook 2’, Enter.
2: Nee, klopt ook niet.
1: Geen goede expressie ...
Obs: Kun je op papier proberen op te schrijven wat er gebeurt? Hoe heet die eerste strook?
1,2: 5 keer n plus 27.
Obs: Wat doe je dan vervolgens?
1: Nou, min 7 ...
Obs: Min 23, en hoeveel n heb je nu?
2: 5 plus 27, dat is ..., ja $n = 1$ dus, want 5 keer 1 is toch 5. Dus dan moet je 5 keer 27, dat is 32.
1: Natuurlijk is 5 keer n niet 5.
2: Wel.
1: Nee, want n is nummer, dus als je dan 5 keer 6 hebt, dan is dat toch geen 5!

Dit gaat niet helemaal goed.
Er wordt geworsteld met $5n - 7n$ en met $27 - -23$.
Ze gaan door tot het etiket groen wordt.

Voor deze leerlingen is de aanpak van de dubbele tabel (twee stroken vergelijken) prima. Daarmee kunnen ze het probleem oplossen. Het struikelblok vormt de algebraïsche vaardigheid van het werken met minnen. De leerlingen weten wat ze willen, namelijk twee stroken van elkaar aftrekken en willen dat het liefst door de computer laten doen, maar dat doet-ie niet (de computer doet niet ‘strook1 – strook2’). De leerlingen moeten het zelf doen, maar lopen vast op de techniek. Dat is jammer, want hierdoor kan de motivatie zoek raken. Het doel van de opgave is echter niet om ze de techniek aan te leren, maar ze naar het verschil te laten kijken in termen van voorsprong (hoeveel schelen 27 en –23) en inhalen (wanneer wordt het verschil 0). De hints brengen ze op het goede spoor (dat er een hint beschikbaar is, wordt aangegeven met een lampje) en de directe feedback die het applet geeft via het etiket, houdt de leerlingen aan het werk. De leerlingen krijgen het etiket niet groen, maar zijn gemotiveerd om door te gaan want


opgave 3

a. Maak stroken bij de volgende twee formules: 5*N +27, en 7*N-23, zet ze naast elkaar op het werkblad.

b. Het is duidelijk dat de tweede rij getallen de eerste inhaalt.

Probeer te voorspellen wanneer (bij welke N) dat gebeurt.

- Berekening: ______________________
- Controle: ______________________

c. Je kunt ook met stroken rekenen: bijv. de tweede van de eerste aftrekken (of omgekeerd). Doe dat en typ een bijbehorende formule op het etiket van de antwoordstrook.

- Formule ______________________

d. Gebruik het antwoord van vraag c. om te berekenen wanneer (bij welke N) 5*N +27 en 7*N-23 even groot zijn.

- Berekening ______________________

FIGUUR 3 Een opgave uit Stroken met Etiketten

ze willen het goed krijgen. Ze proberen elkaar te overtuigen en praten zo over strategieën voor het aftrekken van negatieve getallen en wat dat betekent. Het aanzetten tot overleg, het niet opgeven, het leren van je fouten en het bijstellen van je strategie is wat ons betreft waardevoller dan het aanleren van enkele techniekjes.

De ervaringen laten zien dat leerlingen willen doorgaan tot het etiket groen wordt. Dat doen ze niet door te gokken en blind te proberen. Ze leren na te denken over welke aanpak tot resultaat leidt en hoe ze systematisch aan het werk kunnen gaan.

(Meer)waarde

De bediening van het applet gaat heel soepel. Daar hebben de leerlingen geen enkele moeite mee. Het maken van de expressies gaat heel gemakkelijk en vanzelf. Eerder in het schooljaar hebben de leerlingen met pijlenkettingen[2] formules gemaakt en dat komt ook terug in hoofdstuk 10. Wanneer de leerlingen met de stroken aan de gang gaan om expressies (formules) te maken, leggen ze echter geen verband met de pijlenketting. Dat je met het stroken-applet de mogelijkheid hebt een soort pijlenketting en tabel ineen te maken, zou iets meer benadrukt kunnen worden.

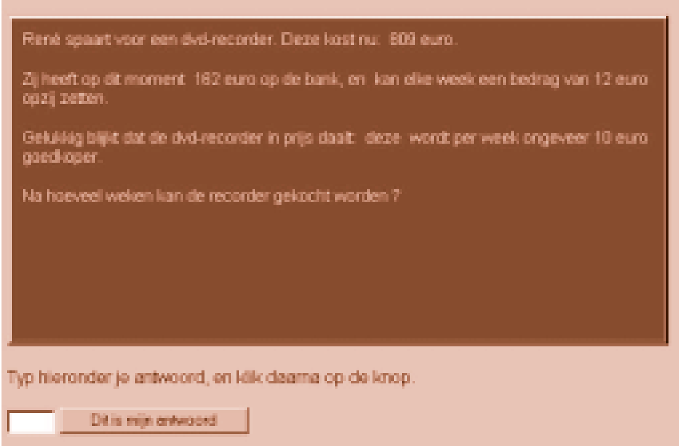
Het etiketvak bij de stroken is heel krachtig, omdat je de mogelijkheid hebt om versneld stroken te maken: je tikt een expressie in het etiketvak en je strook is klaar. Hiermee kom je dus heel snel van formule naar tabel, maar andersom (een formule vinden bij een tabel) is misschien nog wel interessanter; als een leerling een rekenvoorschrift kan verzinnen voor een strook als 5, 9, 13, 17, 21, ..., dan ligt de formule ook binnen handbereik.

De controle van de ingetypte expressie in het etiketvak van de uitkomststrook (in welke vorm dan ook) is een vorm van directe feedback die leerlingen motiveert. Ook dit aspect van het applet maakt het als nieuw model om verbanden te vergelijken zeer waardevol. Grote meerwaarde is dus dat leerlingen op de computer (al dan niet met trial and error) zeer snel resultaat zien, een snelheid die met pen en papier of met een fruitautomaat van Casio of Texas Instruments[3] nauwelijks te evenaren is. Zowel de doeners (die veel pogingen nodig hebben) als de denkers (liefst één poging) komen ruim voldoende aan hun trekken. Afhaken is er nauwelijks bij, want elke computer geeft als een soort privé-docent directe feedback.

Leerlingen vinden het bovendien leuk om achter de computer te werken. Er zit vaart in. En leerkrachten hebben er weer een extra werkvorm bij, waarmee ze hun lessen nog afwisselender kunnen maken.

Terugblik op het lesmateriaal

De eerste versie van het lesmateriaal was vrij complex. Naast de werkbladen met de reguliere opdrachten was er nog meer beschikbaar: een test om de voorkennis van de leerlingen vast te stellen, opdrachten die op verschillend niveau werden aangeboden, hints voor de leerling waar hij op terug kon vallen als hij er niet uitkwam, gecodeerde antwoorden zodat de leerling (na bekendmaking van de code) zelf de antwoorden kon controleren, en een interactieve toets.
De tweede versie van het materiaal die we een jaar later gebruikten, behield de hints, de geschikte contexten en het uitdagende karakter, maar de niveau-differentiatie middels varianten van opgaven is eruit gehaald, evenals de codering van de antwoorden. Dat was toch iets te bewerkelijk, te complex en te ambitieus. De aanpassing had tot gevolg dat er meer rust in het materiaal kwam. Er is nu minder instructie nodig, maar de kern van het materiaal is hetzelfde.
Een zeer goede voorbereiding - welk materiaal je ook gebruikt - blijft wel één van de belangrijkste randvoorwaarden om het werken met applets succesvol te laten zijn. Je moet zelf met de applets gewerkt hebben, en open staan voor inbreng van leerlingen waar je niet op bedacht bent (leerlingen weten soms een applet op een heel creatieve wijze in te zetten). Het is ook goed om rekening te houden met de verschillen tussen leerlingen; weten wat de kern is waar alle leerlingen aan moeten werken en opdrachten gereed te hebben voor de snelle en slimme leerling. Rustig twee bladzijden per les doorwerken is er niet bij!



FIGUUR 4 Een opgave uit de interactieve toets

De toetsresultaten waren in ieder geval minstens zo goed als wij die regulier (zonder ICT) bereikt zouden hebben. Er dient echter wel opgemerkt te worden dat het gissen blijft welke factoren vooral tot dat succes geleid hebben. Is dat het applet, het lesmateriaal of de nog amper genoemde digitale interactieve toets? (Die toets is bereikbaar via *www.stmichaelcollege.nl* → basisvorming → wiskunde → brugklas → hoofdstuk 12, digitale interactieve toets.)
Een andere factor die het succes zou kunnen verklaren, is de bijzondere setting waarin de leerlingen aan het werk zijn geweest: een experimentele onderzoekssituatie waarin 'leuk' met computers wordt gewerkt en waarin ze extra aandacht krijgen. Hierbij moet wel opgemerkt worden dat er op het SMC veel bijzondere situaties zijn en dat leerlingen gewend zijn met de computer te werken. Voor de leerlingen was de setting waarschijnlijk niet veel anders dan ze gewend waren.

Digitale interactieve toets

De toets bestaat uit vier vragen waarbij, zodra je de toets opnieuw opstart, de vragen hetzelfde blijven maar de getallen steeds anders zijn. Soms krijgen de leerlingen een aanwijzing als ze een fout antwoord ingevoerd hebben. De aanwijzing speelt in op mogelijke fouten die ze hebben gemaakt en helpt bij het verbeteren van het antwoord. Met deze toets heb je een interactief instrument waarmee leerlingen met plezier kunnen oefenen met vrij ingewikkelde wiskundevraagstukken.
Na afloop van de toets wordt er een code van vijf tekens gegenereerd, waaraan de docent in één oog-opslag kan zien welke vragen goed beantwoord zijn. (Het zou leuk zijn als het u lukt om deze code te kraken.) Bovendien wordt de tijd bijgehouden die nodig is om de vragen te beantwoorden. Ook daar hadden we leuke ervaringen mee, omdat er zelfs leerlingen waren die tijdens het proefwerk (met de interactieve toets als onderdeel) het record van hun training probeerden te verbeteren. Wel moet je natuurlijk in het proefwerk ook vragen stellen om meer zicht te krijgen op de gekozen aanpak en de notatie daarvan.

Conclusie

Het werken met het applet *Stroken met Etiketten*, het uitproberen van het daarbij gemaakte lesmateriaal, het toetsen en zelfs het nakijken daarvan heeft tot een zeer leerzame en leuke periode geleid, zowel voor leerlingen als voor docent. De resultaten op korte termijn waren goed en op lange termijn hoopgevend. De leerlingen die de eerste versie van het materiaal doorgewerkt hebben, scoorden in het tweede leerjaar in ieder geval ook zeer goed bij het onderdeel vergelijkingen oplossen.

En ja, de volgende keer... gebruikt het SMC dit materiaal weer!

Noten

[1] Stroken met Etiketten is ontworpen door Huub Nilwik, werkzaam bij het FI, naar een inhoudelijk idee van Martin Kindt (zie Referentie).
[2] Voor pijlenkettingen is ook een applet ontwikkeld. Dit applet heet Algebrapijlen en is ook via de WisWeb-site te gebruiken.
[3] Bedoeld zijn hier gewone rekenmachines. In de onderbouw hebben leerlingen nog geen grafische rekenmachine.

Referentie

M. Kindt: Discrete algebra, in: Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, vol. 19(4), pp. 31-36 (2000).

Over de auteurs

David Dijkman (35 jaar oud) is sinds 1996 werkzaam als docent op het St. Michael College te Zaandam (havo/vwo). In het kader van het WELP-project probeert hij lesmateriaal uit dat speciaal gemaakt is bij voor het wiskundeonderwijs gemaakte applets. Hiervan wordt verslag gedaan op de WisWeb-site (www.wisweb.nl).
Martin van Reeuwijk (38 jaar) is werkzaam op het Freudenthal Instituut als onderzoeker en onderwijsontwikkelaar. Hij is projectleider van het WELP-project.
Opmerkingen of vragen naar aanleiding van dit artikel kunt u richten aan dpdykman@wxs.nl en m.vanreeuwijk@fi.uu.nl

Aankondiging / Wiskunde en Muziek, KWG-Wintersymposium 2004

Onder auspiciën van het Koninklijk Wiskundig Genootschap wordt op **zaterdag 10 januari 2004** het jaarlijkse Wintersymposium georganiseerd.
Thema dit jaar is 'Wiskunde en Muziek'.

Plaats - Universiteit Utrecht, Academiegebouw (bij de Dom).
Kosten - Voor deelname wordt een bijdrage van € 12,50 gevraagd voor lunch en consumpties gedurende de dag.
Aanmelding - Bij voorkeur on-line:
http://webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium/programma.html of via *www.wiskgenoot.nl*
Eventuele schriftelijke aanmelding via
Metha Kamminga
NHL, Tesselschadestraat 12
8913 HB Leeuwarden
e-mail: *kamminga@tech.nhl.nl.*

Programma

Muzikale omlijsting: Loek Dikker, pianist, componist en bandleider

09.30–10.00u / Ontvangst met koffie en thee

10.00–11.00u / De piano als logaritmetafel, door Jan van de Craats, hoogleraar wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie, de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.
Tonen en boventonen zijn de bouwstenen van de muziek. Met resonantieproeven aan de piano zullen we boventonen hoorbaar maken en ontdekken wat het toetsenbord ons kan leren over logaritmen met grondtal 2.
Octaven en kwinten vormen de grondslag van het westerse muziekschrift en de indeling van het klavier bij toetsinstrumenten.
Met grafieken en diagrammen zullen we duidelijk maken waarom je een piano kunt beschouwen als een muzikale logaritmetafel.

11.00–11.15u / Pauze met koffie en thee

11.15–12.15u / Muziek, digitale signaalverwerking en (school)wiskunde, door Rutger Theunissen, sonoloog.
In de relatie tussen muziek en wiskunde is door de komst van de computer radicaal verandering gekomen. Wil je als componist muzikale klanken en klankstructuren aan de computer ontlokken – ook als het gaat om 'gewone' instrumentale, tonale muziek – dan bedien je je in essentie van de taal van de wiskunde. Vandaar dat inmiddels ook op het conservatorium wiskunde wordt gedoceerd in studierichtingen waarbij de computer een rol speelt, zoals sonologie, muziekregistratie en muziektechnologie.

12.15–13.30u / Lunch

13.30–14.30u / Een slag in de ritmeruimte; over ritme, timing en tempo in muziek, door Henkjan Honing, onderzoeksgroep Music, Mind, Machine Groep (MMM), Universiteit van Amsterdam en Katholieke Universiteit Nijmegen.
Tijd klontert. Luisteraars blijken een gespeeld ritme niet als een continuüm te horen maar als categorieën: klonters in de tijd. Dit werd bestudeerd door luisteraars een groot aantal ritmes te laten horen, een subset van de set van alle mogelijke ritmes samengesteld uit drie tijdsintervallen: een zogenoemde ritmeruimte. De onderzoeksmethode gebruikt concepten uit de wiskunde en fysica (zoals convexiteit en entropie) die het mogelijk maken de empirische resultaten precies te karakteriseren. Het doel van deze formalisaties is te komen tot een cognitieve theorie van ritme en timing, onderwerp van huidig onderzoek.

14.30–15.30u / Afsluiting en napraten met een drankje.

Verschenen / Eerste Hulp bij Statistiek



Auteur: Jasper Velders
Uitgever: VF Productions VOF, Leiderdorp
prijs: € 6,50

Op de middelbare school leert iedereen rekenen met de Grafische Rekenmachine. Op universiteit en HBO wordt er vervolgens helemaal niets meer mee gedaan. Vooral bij statistiek is dit een groot gemis voor iedere student. Om toch optimaal gebruik te maken van alle uitgebreide mogelijkheden die de GR biedt, kun je nu het boekje 'Eerste Hulp Bij Statistiek' bestellen. Alle statistische functies die je nodig hebt voor je tentamen worden behandeld en ook nog uitgelegd aan de hand van een voorbeeldopgave. Eerste Hulp Bij Statistiek is bedoeld voor iedereen met een TI-83, TI-83+ of TI-83+ Silver Edition.

(Bron: *www.hulpbijstatistiek.nl*)

HET GEBRUIK VAN DE ZEBRABOEKJES VAN DE VERENIGING

Ervaringen in vwo-6 wiskunde B1

[Gert de Kleuver]

Schoolbibliotheek

Vorig cursusjaar had ik voor de eerste maal een groep wiskunde B1 in vwo-6. Daardoor kreeg ik te maken met een zebrablok. Gelukkig hebben wij op school het beleid om de Zebraboekjes van de Vereniging in de schoolbibliotheek te plaatsen; de schoolleiding vindt het belangrijk dat de wiskundesectie bibliotheekboeken voor leerlingen aanschaft. Zo zijn er voor een groep van 22 leerlingen ook 22 boekjes beschikbaar; van elk boekje uit de serie[1] staan er twee in de bibliotheek.

Vooraf

Vóór de zomervakantie van 2002 had ik de klas meegedeeld dat er in september gewerkt zou gaan worden met de zebraboekjes. Nu waren de reacties op dit voorstel niet zo positief. De leerlingen gaven aan dat ze vonden dat 'wiskunde weer eens iets bijzonders' had. 'Is dit nodig?', was een veel gestelde vraag.

Om tijdens de lessen het overzicht niet kwijt te raken, had ik vooraf de volgende doelen gesteld en beslissingen genomen:
- Een leerling kiest een boekje dat past bij zijn of haar interesses.
- Een leerling werkt alleen of in een tweetal aan een boekje.
- Een leerling maakt zelf een planning - ik heb namelijk nogal eens de neiging om voor leerlingen alles vooruit te regelen, bijvoorbeeld met planners.
- Een leerling maakt keuzes in het al dan niet overslaan van opgaven.
- Een leerling zal zelfstandig hiaten in kennis wegwerken. Ik zal daarbij wél voor de nodige boeken moeten zorgen.

Boekje kiezen

Tijdens de eerste les van het cursusjaar 2002/2003 had ik mijn set boekjes meegenomen en van elk boekje globaal iets verteld over de inhoud. De leerlingen hebben daarna inzage in de boekjes gehad. Vervolgens zijn zij naar de bibliotheek gegaan en hebben een boekje gekozen.

Tijdens de inzage heb ik met verschillende leerlingen gesproken over hun voorlopige keuze. Dit had tot gevolg dat leerlingen het goede boekje kozen. De boekjes over 'De laatste stelling van Fermat' en 'Fractals' heb ik bij nader inzien niet laten kiezen. Ik vond ze inhoudelijk te moeilijk voor mijn leerlingen.

Tijd

Het aantal beschikbare lessen of contacturen voor de leerlingen werd op 7 à 8 gesteld. Daarbij was er in het rooster ruimte om zelfstandig aan een onderwerp te werken. Bijna iedere middag waren zij om ongeveer 13:30 uur uitgeroosterd.
Het maken van een planning vooraf is door de leerlingen niet gedaan. Zij begonnen allemaal direct te werken aan de inleidende opgaven. Ik heb te weinig tijd aan de planning besteed. Door de verschillende boekjes leverde het een verscheidenheid aan vragen op.

Hobbels

Het steeds wisselen van onderwerp kostte mij erg veel energie. Je bleef aan het omschakelen.
Het werd mij duidelijk dat de leerlingen toch wel de nodige hobbels moesten nemen. Enkele voorbeelden.
- De leerlingen met het boekje 'Kattenaids en statistiek' hadden geen kennis van hypothese-toetsen. Zij hebben toen een oud deel van onze methode bestudeerd. Dit kostte de nodige tijd, maar het gaf een goed gevoel dat zij daardoor wel snel verder konden.
- Bij het boekje 'Pi' was er onwennigheid ten aanzien van de verschillende formules en berekeningen. De leerlingen zijn niet erg ver in het boekje gekomen, maar hebben wel met plezier aan het onderwerp gewerkt en het nodige geleerd.
- Het boekje 'Poisson, de Pruisen en Lotto' gaf aan dat er een programma gedownload moest worden. Daar had ik geen rekening mee gehouden. Verder hadden de leerlingen geen idee wat nu precies een verdeling inhoudt. Dit gaven zij ook aan in het verslag dat aan het eind ingeleverd moest worden.

Terugblik

Als ik terugkijk, moet ik zeggen dat veel leerlingen met plezier met de boekjes gewerkt hebben. De vooraf gestelde doelen zijn zeker gehaald, ondanks het feit dat ik deze eerste keer als een experiment gezien heb. Jammer genoeg konden de leerlingen niet geheel door de boekjes heen komen; het zal de volgende keer zeker meer tijd kosten. Waarschijnlijk zal ik het zebrablok ook op een later tijdstip in een cursusjaar plannen zodat er minder hiaten in kennis zullen zijn.
De volgende titels kwamen er bij mijn groep leerlingen goed uit:
- Kattenaids en Statistiek;
- Perspectief, hoe moet je dat zien;
- De Gulden Snede;
- Poisson, de Pruisen en de Lotto;
- Schuiven met auto's, munten en bollen;
- Spelen met gehelen.

Deze boekjes wil ik een volgende keer als eerste optie opnieuw gebruiken, maar dan moet ik wel zorgen dat ze makkelijker door de stof heen komen - door vooraf de extra hulpmiddelen op te zoeken en toegankelijk te maken voor de leerlingen.

Noot

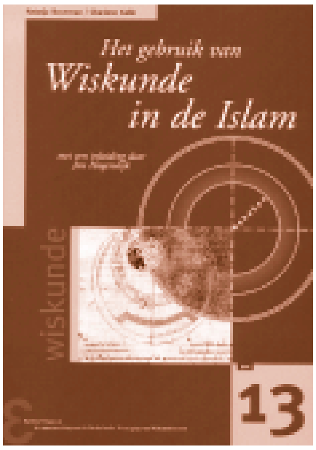
[1] Voor een volledig overzicht van de verschenen titels zie de website van Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl/zebra.php).

Over de auteur

Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@wanadoo.nl) is docent aan het Ichthus College te Veenendaal, en tevens redactievoorzitter van Euclides

Boekbespreking / Het gebruik van Wiskunde in de Islam (Zebra 13)

Auteurs: Natasja Bouwman, Charlene Kalle Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2002) isbn 90 5041 077 4 prijs: € 8,00 [Klaske Blom]



Geloof en wetenschap

Dit boekje is verschenen als dertiende deel in de u allen bekende Zebra-reeks en slaat een brug, zoals de titel doet vermoeden, tussen geloof en wetenschap. In de Arabische wiskunde vinden we drie speciale problemen die met de Islam te maken hebben: het vinden van de richting van Mekka, het bepalen van begin en eind van de vastenmaand en het bepalen van de gebedstijden. Deze Islamitische toepassingen vormen maar een klein en niet representatief deel van de Arabische wiskunde, aldus Jan Hogendijk die de inleiding bij dit boekje schreef. Het boekje is rond deze drie problemen geschreven om een indruk te geven van de manier waarop moslims vroeger en nu deze problemen oplosten. Hoewel er uit Iran exacte oplossingen uit de tiende eeuw voor deze problemen bekend zijn, komen die niet in deze uitgave voor, omdat ze te moeilijk zijn voor leerlingen van het vwo. De auteurs komen met eenvoudiger middeleeuwse en moderne oplossingen, deels exact en deels benaderend. Deze benaderende oplossingen werden vaak gebruikt door Islamitische geestelijken die geen idee hadden van wiskundig exacte oplossingen.

Inhoud

Het boekje bevat vier hoofdstukken met tekst en bijbehorende opgaven om de theorie te leren toepassen; de beknopte antwoorden vinden leerlingen achterin. Hoofdstuk 2, *De hemelbol*, behandelt de projectie van zon, sterren en planeten op de hemelbol, een bol met de aarde als middelpunt. Naast de introductie van een aantal nieuwe begrippen als *zenith* en *nadir*, worden de banen van de zon, maan en sterren beschreven. De tien opgaven bevatten veel tekenopdrachten waardoor de stof goed verwerkt kan worden. De inhoud van het hoofdstuk is redelijk technisch; het niveau lijkt goed haalbaar, maar vereist van leerlingen een goede leesvaardigheid en doorzettingsvermogen om zich door de nieuwe begrippen heen te werken. De auteurs richten zich op directe toon tot de lezende leerling: 'Als je naar de maan kijkt zie je dat deze verschillende fasen doorloopt. Soms is de maan vol [...]. Als het goed is heb je waarschijnlijk nu al een aardig idee over hoe die hemelbol in elkaar ziet en ken je een beetje de termen die erbij gebruikt worden. Hoewel dit model van het heelal niet erg realistisch is, kun je er wel makkelijk en goed de bewegingen van de zon, maan en de vaste

sterren mee beschrijven. Daarom gaan we in de volgende hoofdstukken...'

Hoofdstuk 3, *De Islamitische kalender*, en hoofdstuk 4, *De gebedstijden*, zijn kort en informatief van karakter.

Hoofdstuk 5, *De richting van Mekka,* behandelt manieren waarop de *qibla*, de richting van Mekka, bepaald kan worden. De eerste manier is een vroeg middeleeuwse methode, waarbij de wereld in eerste instantie in vier zones verdeeld werd: Syrië, Irak, Jemen en het Westen; later breidde deze verdeling zich uit naar meer verschillende gebieden. In de zone waarin je je bevond hoefde je alleen maar de voorschriften van dat gebied op te volgen. De tweede manier stamt uit de negende eeuw en maakt gebruik van een benadering van de hoek tussen de *qibla* en het zuiden. Om de hoek exact te berekenen, een methode die vanaf de tiende eeuw gebruikt werd door Islamitische geleerden, is het nodig om kennis van zaken te hebben van bolmeetkunde. Het hoofdstuk leidt leerlingen daarom in tien pagina's door die bolmeetkunde met korte uitleg van de theorie en verwerking daarvan in twaalf opgaven.

Voor wie?

Ik was onmiddellijk gefascineerd door de titel van dit dertiende deel omdat ik een mogelijkheid zag 'iets aansprekends te doen met mijn leerlingen met een Islamitische culturele achtergrond'. Aan twee leerlingen uit havo-5 in een NG-profiel, een Irakese en een Turkse jongen, gaf ik het boekje met de vraag om het eens te bekijken en mogelijk te gebruiken als achtergrondinformatie bij hun profielwerkstuk. Ze vonden het niks.

'*Mevrouw, we doen liever....; mijn vader weet trouwens al lang hoe je de richting van Mekka moet vinden. Hij heeft het weer geleerd van zijn vader en die ook weer van de zijne, dus ik heb dat boekje helemaal niet nodig.*'

Op mijn vraag of hij me die methode uit kon leggen, bleef het stil.

'*Maar mijn vader weet het wel, en als ik het nodig zou hebben kan ik het hem vragen, hij weet het, dus dat boekje heb ik niet nodig.*'

Het boekje eindigt met vier open onderzoeksopgaven en een verwijzing naar informatieve internetbronnen. In twee van de vier opdrachten wordt de suggestie gedaan, bij moslims te informeren hoe zij deze problemen van het bepalen van richting en tijden aanpakken. Dit brengt me bij de doelgroep: in mijn ogen is dit boekje door de toepasbare wiskunde en sterrenkunde vooral geschikt voor bovenbouwleerlingen die graag willen dat de wiskunde die ze beoefenen 'ergens goed voor is'. Het niveau is goed haalbaar, ook door een zelfstandige bestudering van de stof, en de toon van het boekje lijkt mij hierbij goed aansluitend.

De meerwaarde van het boekje zou ik echter willen zoeken in de positieve bijdrage die het kan leveren aan de dialoog tussen mensen uit verschillende culturen. En dan niet op de manier zoals ik het deed door het aan te bieden aan leerlingen met een Islamitische achtergrond, maar juist door het aan te reiken aan Westerse leerlingen die zich willen verdiepen in een andere cultuur waardoor een gesprek op gang kan komen.

Over de recensent

Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) werkt als wiskundedocente op het Hooghe Landt in Amersfoort. Zij is tevens redacteur van Euclides.

Boekbespreking / De juiste toon (Zebra 15)

Auteur: Jan van de Craats   Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2002)   isbn 90 5041 079 0

prijs: € 8,00   **[Hans Daale]**



'Spelen op een Zebra met boventonen'

Muzikale thriller

Het Zebra-boekje 'De juiste toon' van Jan van de Craats is een wiskundige detective-roman. Een soort muzikale t(h)riller. De titel had wat mij betreft best mogen luiden: 'Wie heeft de juiste toon te pakken genomen?' En dan is het niet de blokfluitende butler die het heeft gedaan, maar de simpele pianist. Ik zal dat uitleggen.

In mijn jeugd heb ik gedurende een aantal jaren de piano mogen leren bespelen, en met die opvoeding als referentie werd ik eigenlijk al in het eerste hoofdstuk op het verkeerde been gezet. In het eerste deel van het

Zebra-boekje worden met behulp van wiskunde allerlei zaken aan de orde gesteld zoals octaven, tertsen en kwinten, maar vooral ook het laten meeklinken van boventonen bij het spelen van een toon. Dat geschiedt nu juist aan de hand van het klavier van een piano en dus ging ik 'als vanzelf' vanuit dat instrument meeredeneren bij het puzzelen rond toonhoogtes, hertzen, trillingen en zwevingen.
Zoals in een goede detective zitten er natuurlijk aanwijzingen in de proloog en de eerste uitzettingen, maar als je dan al een flink stuk verder bent en leest dat bijvoorbeeld Mozart dertien tonen gebruikt in een octaaf, zegt de hardnekkige pianist in je: 'Dat kan helemaal niet, want ik kan er maar twaalf op mijn instrument vinden: zeven witte en vijf zwarte.'
Vervolgens zie je op de notenbalk dat er een *fis* naast een *ges* wordt gebruikt. Voor een pianist is dat dezelfde toets, dus waarom twee verschillende benamingen gebruiken?
Dan ga je je realiseren dat je domweg te snel hebt gelezen en blader je terug zoals gebruikelijk bij een mystery-story. Je leest dan nog eens beter het gedeelte over de waarschuwing dat dit voor violisten, blazers en alle andere niet-pianisten wel degelijk andere tonen zijn. Er wordt uitgelegd dat dit te maken heeft met de wijze waarop de snaren zijn gestemd en in welke toonsoort het stuk is geschreven. Aan het eind van het boekje wordt daarom ook uitgebreid ingegaan op de 'strijd' die jarenlang is gevoerd over het stemmen van instrumenten als de piano en het orgel, waarbij de bespeler ervan niets anders kan doen dan de beschikbare toetsen indrukken en afwachten wat voor toon er uitrolt. Zo iemand als een violist of cellist kan met behulp van de snaren en de wijze van bespelen veel subtieler te werk gaan. Maar bij een pianoconcert moet hij of zij zich toch domweg aanpassen – mogelijk erg gefrustreerd, zoals Jan van de Craats al oppert - en dat maakt dus nu precies de pianist tot de schuldige bij het zoeken van de juiste toon(soort). Maar ja, hadden die componisten maar niet zoveel concerten voor piano moeten schrijven.

Boventonen

Bovendien wordt in het begin uitgelegd dat men de piano (en het orgel) uiteindelijk - na lang wikken en wegen van de voor- en nadelen voor alle musici - heeft opgezadeld met een stemming waarbij binnen een octaaf de twaalf tonen keurig op een gelijke afstand van elkaar liggen. Daarbij wordt gebruik gemaakt van logaritmen, zoals bekend het middel om gelijke verhoudingen om te zetten in even grote verschillen. En dat leidt nu weer tot het fenomeen 'boventonen'. Net als bij elk instrument heeft elke toon op een piano deze 'gratis' meetrillende tonen, maar ze klinken heel kort vergeleken met andere instrumenten, en zo wordt een pianoconcert gelukkig nog steeds een harmonieus geheel.

Contrabas

Als je deze Zebra-uitgave hebt gelezen, dan begrijp je in ieder geval een heel stuk beter wat laatst was te lezen in het programmaboekje over de concert-aria *Per questa bella mano* van Mozart, in mei uitgevoerd in het Concertgebouw – toevallig samen met het pianoconcert dat hierboven al werd aangehaald: 'In Wenen werden meestal 5-snarige contrabassen met fretten bespeeld. Deze instrumenten hadden een terts-kwarts stemming (F-A-d-f of fis-a). Het voordeel van deze stemming was een groter speelgemak in de passende toonsoorten door het gebruik van open snaren en flageoletten (natuurtonen), en daarmee verbonden een vrije en open klank. De contrabassist die de eerste uitvoering speelde, vertelde later: "Omdat mijn 18^{e} eeuwse contrabas, die niet Weens maar Italiaans is, slechts vier snaren heeft, heb ik voor een compromis moeten kiezen. Namelijk het weglaten van de laagste snaar, die op twee keer na niet nodig is, en de andere snaren 'op zijn Weens' te stemmen."'
Met 'De juiste toon' wordt dus op die manier via de wiskunde een kijkje gegeven achter de schermen van het orkest en wordt je waardering voor het orkest alleen maar groter.

Klavarskribo

Overigens roept dit allemaal natuurlijk weer vragen op, waarbij de antwoorden mogelijk een tweede boekje vragen. Zo weet ik nog van vroeger dat er ook mensen noten lazen met Klavarskribo. Dat scheen veel beter te zijn dat het gewone notenschrift met vijf lijnen, waarvan Jan van de Craats aangeeft dat dit een kwestie van traditie is en mogelijk te maken heeft met het bereik van de zangstem.

Tot slot

Het zal duidelijk zijn dat 'De juiste toon' een bijzonder aardig boekje is voor degenen die wiskunde en muziek willen en kunnen combineren. De vereiste wiskunde-bagage is zeker aanvaardbaar, maar wel noodzakelijk om inzicht te krijgen in de zoektocht naar de stemming van de instrumenten en de problemen die samenspelende musici moeten zien op te lossen.
Wellicht is het een idee om er ook nog eens voor de echte liefhebbers een cd-rom bij te maken, met voorbeelden uit de aangehaalde concerten. Mogelijk is dat iets voor de NVvW, zodat elke leerling die stukken kan downloaden van de website?

Over de recensent

Hans Daale is redacteur van Euclides. Zijn e-mailadres is dae@hesasd.nl.

DAN LIEVER DE LUCHT IN!

Wiskunde Scholen Prijs 2003, aflevering 3.
Het Heelal, een themaweek science voor brugklassers.

[Heleen Verhage]

Heelal

April 2003 is voor mij de maand van de uitreiking van de Wiskunde Scholen Prijs. Na twee bezoeken aan scholen in Drachten is op dinsdag 15 april het Pleincollege Eckart in Eindhoven aan de beurt. Deze school heeft in de categorie bavo van de Wiskunde Scholen Prijs een gedeelde prijs[1] verdiend met de inzending *V+/Het heelal*. De aanduiding *V+* verwijst naar de aparte klassen die de school heeft geformeerd voor de betere havo/vwo-leerling. *Het heelal* is de titel van een themaweek *science* voor brugklassers. Deze themaweek is vakoverstijgend, met specifieke aandacht voor wiskunde, techniek en biologie.

Slotmiddag themaweek

Samen met Jan van de Craats, een van de juryleden, woon ik op de school de slotmiddag van het project bij, waarna Jan de feitelijke prijsuitreiking voor z'n rekening neemt. We worden opgewacht door drie leerlingen die later op de middag als presentatrices zullen optreden. De middag bestaat uit een bijeenkomst van ruim twee uur, waarin twaalf groepjes van vier leerlingen in drie tot acht minuten alle aspecten van de projectweek die ze zojuist achter de rug hebben met prachtige PowerPoint-presentaties kort belichten. Deze presentaties worden aan elkaar gepraat door de drie presentatrices. Publiek is er ook: er is een ruim gevulde collegezaal, bestaande uit ouders, broers en zussen, opa en oma, en wie er verder maar opgetrommeld zijn. Als klap op de vuurpijl worden er tot slot zelfgemaakte raketten afgeschoten op het sportveld van de school.

Klassen V+

Voorafgaand aan de presentaties vertelt wiskundedocent John van Maasakkers (een van de drijvende krachten achter het project) het een en ander over zijn school, over de V+ benadering en over het Heelal-project.
Drie jaar geleden heeft de school het plan opgevat om meer aandacht te gaan besteden aan de betere leerlingen. Voor de leerjaren 1 t/m 3 heeft men toen V+ klassen ingesteld, dat zijn klassen voor de betere leerling. Het criterium voor V+ is een vwo-advies of een havo-advies met hoge cito-score. Door tempoverhoging, meer zelfstandigheid en differentiatie is er in de V+ klassen ruimte voor vier vakoverstijgende themaweken per leerjaar.
Het heelal-project is de invulling van een van de themaweken voor de brugklas. In de themaweek zijn wiskunde, techniek en biologie geïntegreerd. De drie andere themaweken voor de brugklas zijn *Noord-Zuid* (aardrijkskunde, geschiedenis, levensbeschouwing), *Vissen* (tekenen, handvaardigheid, muziek, lichamelijke opvoeding) en *Communicatie* (Nederlands, Frans, Engels).

Compacten en verrijken

Naast deze themaweken probeert men in de V+ klassen ook *binnen* de vakken ruimte te creëren om de leerlingen iets extra's te bieden. Dit wordt *compacten en verrijken* genoemd. Per periode, er zijn er vijf in een jaar, maakt John een week vrij om op een creatieve manier met wiskunde bezig te zijn. Recentelijk waren zijn leerlingen bezig met magische figuren (klas 1) en zelf IQ-testen maken (klas 2). Andere voorbeelden zijn raadsels, Escher-vlakvullingen en de nationale wetenschapsquiz. Verder doen veel leerlingen uit de onderbouw mee aan de Kangoeroe-wedstrijd; de laatste keer waren het er rond de 250. Ook aan de Olympiade doen enkelen mee. Voor klas 3 staan volgend jaar codering, geheimschriften en cryptologie op het programma, in samenwerking met Hans Sterk van de TU Eindhoven.

Programma Heelal-project

Na dit informatieve gesprek met John is het tijd voor de presentaties van de leerlingen over het Heelal-project. Voorzien van thee, koffie of appelsap en natuurlijk een Mars of Milky Way is iedereen er helemaal klaar voor in de aula. Voordat de leerlingen het woord krijgen, legt John in een inleidend praatje kort uit hoe de themaweek in elkaar steekt (zie figuur 1).
Een zelfgemaakte video van de eerste drie dagen (dag 4 = vandaag!) laat zien dat deze dingen inderdaad allemaal gedaan zijn en dat de leerlingen heel enthousiast bezig zijn. Alle leerlingen zijn met alle onderdelen bezig geweest, voor de presentaties zijn de onderwerpen verdeeld over de leerlingen.

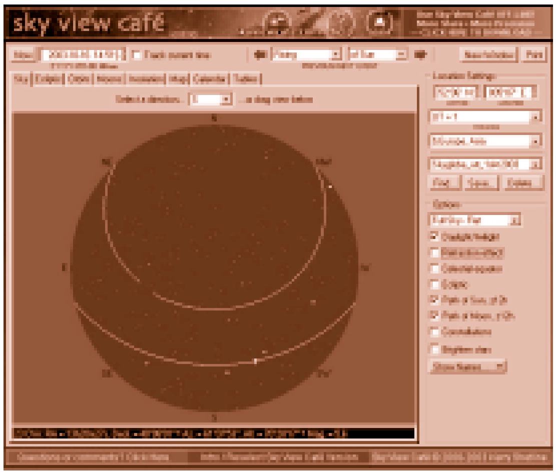
Dag 1
Ochtend: Inleiding op het thema, video's; informatie zoeken op internet; computerprogramma Skyglobe verkennen.
Middag: Wiskunde in Space, een serie wiskundeopdrachten.

Dag 2
Excursie naar Artis: het planetarium, tentoonstelling kosmosfeer, biologieopdrachten, geologisch museum met fossielenspeurtocht, publieksprogramma 'Varen op de sterren'.

Dag 3
Proef maanstanden; zwaartekracht-proefjes; eigen raketten bouwen van petflessen.

Dag 4
Leven in het heelal, voorbereiding presentaties; afsluiting en presentaties; lanceren eigen raketten op sportveld.

FIGUUR 1 Het programma van de themaweek



FIGUUR 2 Beeldschermafdruk van SkyGlobe

Presentaties van de leerlingen

In de twaalf presentaties die volgen komen alle genoemde thema's in een notendop terug. Wat opvalt, is dat de meeste groepjes kans gezien hebben een prachtige PowerPoint-presentatie te maken, en dat terwijl ze toch maar anderhalf uur voorbereidingstijd hadden voor hun presentatie.
Zo presenteert het derde groepje bijvoorbeeld vlotjes het computerprogramma *Skyglobe* (zie *www.skyviewcafe.com* en figuur 2), waarmee je een afbeelding van de sterrenhemel kunt krijgen voor de tijd en plaats van je eigen keuze. Ook de gestalten van de maan zijn voor een willekeurig tijdstip op te vragen.
Het vierde groepje heeft *Wiskunde in Space* als onderwerp. De leerlingen vertellen dat ze flink gepuzzeld hebben aan opdrachten die duidelijk moeilijker waren dan normaal, het was vwo 3 niveau: '*Het was allemaal nieuwe wiskunde, zoals pi en nog zo wat.*' Ze hebben flink gezocht op internet en in de encyclopedie, en zijn er zo met hard werken toch uitgekomen.

Een voorbeeld van een wiskundeopgave uit het lespakket van de themaweek:
Pluto kwam op Uranus een Mars-mannetje tegen met een Milky-way in zijn hand. Het Mars-mannetje zat met een probleem. Hij moest nl. van E.T. (onze filmheld) uitrekenen hoeveel van deze Milky-way's (met een inhoud van 6 cm^3) in de inhoud van Uranus zouden gaan.
Kunnen jullie misschien even helpen?

In totaal bestaat het onderdeel *Wiskunde in Space*, goed voor één dagdeel, uit twaalf opdrachten. De samenhang tussen de opdrachten zit in de eerste plaats in de heelal-context, niet zo zeer in de wiskundige inhoud. De opdrachten variëren van het maken van een gewogen graaf van ons zonnestelsel tot het uitrekenen van de tijd die een radiosignaal er over doet om een bepaalde afstand te overbruggen.

Wat opvalt, is dat de leerlingen gefascineerd zijn door feitjes. Zo leer ik bijvoorbeeld van het zesde groepje dat de oppervlakte van Saturnus 3 miljoen km^2 is.

Het negende groepje rapporteert over de film *Varen op de sterren* die ze in Artis hebben gezien. Uit die film hebben ze geleerd hoe de VOC-schepen in de Gouden Eeuw hun lengte- en breedtepositie op zee konden bepalen met behulp van astrolabium, kwadrant en jacobsstaf.
Groepje tien geeft een demonstratie van de schijngestalten van de maan. Zaklamp en voetbal bewijzen hier goede diensten. Ter afwisseling wel prettig, na al die powerpoints! Al zijn ze nog zo mooi, dat gaat toch ook weer vervelen op den duur.

De prijsuitreiking

Twaalf presentaties later is het woord aan Jan van de Craats, die de Wiskunde Scholen Prijs uitreikt aan de drie presentatrices die ons zo keurig ontvangen hebben bij aankomst op de school (zie figuur 3).
Hoewel het publiek al aardig wat te verstouwen heeft gekregen, weet Jan de leerlingen toch warm te krijgen voor het volgende probleem:
Stel je een hangende kabel voor. Die heeft niet de vorm van een parabool, al lijkt het er op het oog wel op. Zo'n vorm heet een kettinglijn. Neem nu aan dat de zwaartekracht minder is, zoals op de maan bijvoorbeeld. Vraag: Blijft de vorm van de kabel dan hetzelfde, of wordt die anders?

De diepere boodschap van Jan is, dat de leerlingen vooral ook zelf moeten nadenken en op onderzoek uitgaan, dat is het leukste. Internet kan helpen, maar geeft heus niet alle antwoorden. Het antwoord op dit probleem bijvoorbeeld kun je vast niet vinden op internet.

Uit het juryrapport blijkt de waardering die de jury heeft voor deze inzending:
De jury vindt deze inzending inspirerend, uitdagend en spectaculair. Het is een groot onderwerp, dat niet kinderachtig is aangepakt. Dit project laat zien hoe wiskunde nodig is bij allerlei vragen die over het heelal bij je opkomen. Bovendien toont dit project aan dat Algemene Natuurwetenschappen ook goed in de brugklas kan. Er is waardering voor het feit dat



FIGUUR 3 Jan van de Craats feliciteert docent John van Maasakkers



FIGUUR 4 Leerlingen schieten hun zelfgemaakte raketten af

docenten wiskunde, techniek en biologie hier echt samenwerken. De gekozen werkvorm (projectweek) maakt dat leerlingen zich gedurende langere tijd in een onderwerp kunnen verdiepen, waardoor aspecten van diverse vakgebieden vrij automatisch aan de orde komen.
De jury ziet ook enkele nadelen aan dit project: het is slechts bedoeld voor een kleine groep (hoog)begaafde leerlingen en het vraagt een grote tijdsinvestering. Een suggestie voor het lesmateriaal is om in het onderdeel Wiskunde in Space meer aan wiskundige modelvorming te doen. In de huidige versie is dit onderdeel hier en daar nog te 'sommetjesachtig'.

Raketten afschieten

De middag wordt afgesloten op het sportveld, waar in korte tijd tientallen raketten de lucht in gaan (zie figuur 4). Het maken van een eigen raket is de afsluitende praktijkopdracht van de themaweek. Heel verrassend hoe je van eenvoudige materialen (twee petflessen) zo gemakkelijk zelf een raket kunnen bouwen, die wel tot veertig meter hoog kan komen. Wel flink lucht erin pompen, zodat er een overdruk van 6 bar ontstaat. Aan het touwtje trekken zodat de raket losschiet van zijn lanceer-installatie, en daar gaat-ie dan. Een kleine hoeveelheid water fungeert als brandstof. In het begeleidende lesmateriaal wordt ingegaan op de vraag hoe zo'n raket nu eigenlijk precies werkt.

Terugkijkend op deze middag kan geconstateerd worden dat het Heelal-project veel elementen bevat die aansluiten bij een aantal actuele onderwijsthema's van dit moment. Er is aandacht voor vakkenintegratie, er wordt veel zelfstandig werk verwacht van de leerlingen, er wordt gebruik gemaakt van ICT (er is ook ervaring opgedaan met een digitale leeromgeving), er zijn praktijkopdrachten, leerlingen worden enthousiast gemaakt voor bèta-techniek, er wordt iets extra's geboden voor de betere leerling, het onderwijs blijft niet beperkt tot binnen de muren van de school. Kortom, we hebben hier een duidelijk voorbeeld van een 'good practice' te pakken.

Informatie

Wie meer over dit project wil weten kan contact opnemen met John van Maasakkers (e-mail: *johnvmaasakkers@hetnet.nl*).
Meer informatie over de Wiskunde Scholen Prijs is te vinden op *www.wiskundescholenprijs.nl*.
De sluitingsdatum voor deelname aan de Wiskunde Scholen Prijs 2004 is 15 februari 2004.

Met dank aan de docenten John van Maasakkers en Marc Engel.

Noot

[1] Het Pleincollege Eckart deelt de eerste prijs in de categorie basisvorming met het SG Tabor (locatie Oscar Romero) in Hoorn. Beide scholen ontvangen €500. De inzending van het Oscar Romero wordt besproken in een volgend nummer van Euclides.

Over de auteur

Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl) is werkzaam bij het Freudenthal Instituut (Universiteit Utrecht) en projectmanager van het WisKids-project. Tevens is zij de organisator van de Wiskunde Scholen Prijs.

De Wiskunde Scholen Prijs is onderdeel van het WisKids-project.

Doel van WisKids is het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van tien jaar en ouder. Tevens wil WisKids het imago van de wiskunde verbeteren.
WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO).

Voor meer informatie zie *www.fi.uu.nl/wiskids* of mail naar *wiskids@fi.uu.nl*

EVALUATION OF MATHEMATICS TEACHING IN SECONDARY SCHOOLS

Een internationaal inspectieproject met betrekking tot kwaliteit van wiskundeonderwijs

[Wim Kleijne]

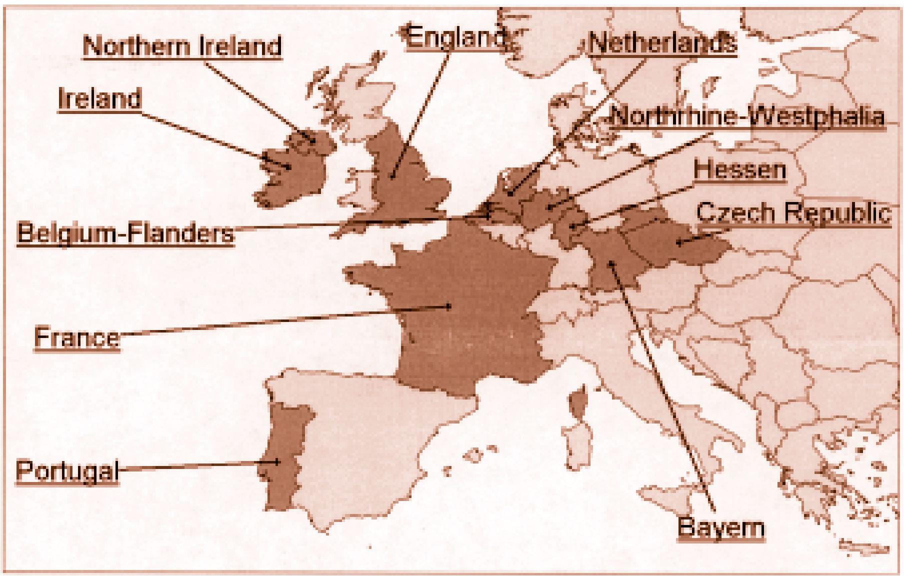
Vooraf

In dit artikel wil ik iets vertellen over een wiskunde-project dat ik als (wiskunde)inspecteur heb mogen uitvoeren en leiden. Het bijzondere aan dit project is dat het een middel heeft opgeleverd dat niet alleen door externe beoordelaars (zoals inspecteurs) gebruikt kan worden, maar waarmee docenten en wiskunde-secties ook zélf de kwaliteit van hun eigen wiskunde-onderwijs onder de loep kunnen nemen. Daarmee kunnen tevens heel praktisch eventuele verbeterpunten opgespoord worden die docenten zélf zouden willen aanbrengen in hun lespraktijk. Dan dus niet aan-gestuurd en beoordeeld van buitenaf, maar geleid vanuit de individuele docent of wiskundesectie zélf. De ervaring heeft uitgewezen dat wanneer men hiermee zelf aan de slag gaat, dit buitengewoon stimulerend kan werken. In dit artikel zal ik een globaal overzicht van het project geven en van het instrumentarium dat het heeft opgeleverd. De details zijn na te lezen in het via internet (*www.sici.org.uk*) gratis te downloaden boek dat hierover is verschenen.[1]

Inleiding en samenvatting

De centrale taak van de inspectie van het onderwijs bestaat uit het evalueren van kwaliteiten van (aspecten van) het onderwijs. Daartoe worden scholen als geheel onderzocht, maar daartoe worden ook onderwijs-kundige aspecten of afzonderlijke vakken onder de loep genomen. Gedurende de afgelopen tien jaar heeft er op dit gebied een ontwikkeling plaatsgevonden in de richting van intensieve internationale samenwerking. Deze ontwikkeling heeft onder andere geresulteerd in de oprichting van een internationale vereniging van onderwijsinspecties. In dit verenigingsverband worden sindsdien diverse evaluatie-activiteiten opgezet en uitgevoerd die onder andere kunnen dienen voor internationale vergelijkingen van onderwijskwaliteiten. Zo werd vanaf 1996 het project 'Evaluation of mathematics in secondary schools' uitgevoerd, onder auspiciën van SICI, the Standing International Conference of Central and General Inspectorates of Education, de genoemde Internationale Vereniging van Inspecties van het Onderwijs. Het doel van dit project was om door middel van gemeenschappelijke inspectie-onderzoeken praktijk en resultaten te evalueren van het wiskundeonderwijs in de deel-nemende scholen voor voortgezet onderwijs. Daar het wiskundeonderwijs in de deelnemende landen onderling meer te vergelijken is in de onder- dan in de bovenbouw, heeft het project zich geconcentreerd op de leeftijdsgroep van 12–16 jaar.

Het project stond onder leiding van drie (wiskunde)-inspecteurs: Wim Kleijne (Nederland, projectleider, auteur van dit artikel), mevr. Marion Kelly (Beieren) en Matt Murray (Noord-Ierland). Naast deze drie personen bestond de projectgroep uit (wiskunde)inspecteurs van de elf deelnemende landen; zie het kaartje in figuur 1.



FIGUUR 1

De centrale vragen en doelen van het project waren:
- de mogelijkheid te onderzoeken:
(a) een gemeenschappelijke visie te ontwikkelen op kwaliteit van wiskundeonderwijs;
(b) een gemeenschappelijk instrument te ontwikkelen om de kwaliteit van wiskundeonderwijs in kaart te brengen;
- in het geval van een positief resultaat van het voorgaande:
(a) een lijst op te stellen van kwaliteitsstandaarden van wiskundeonderwijs;
(b) een instrument te ontwikkelen om daarmee het wiskundeonderwijs te evalueren;
- het wiskundeonderwijs in enige scholen van ieder van de deelnemende landen te onderzoeken door middel van gemeenschappelijke inspecties;
- de resultaten van deze gemeenschappelijke inspecties te vergelijken met de resultaten van TIMSS.[2]

De projectgroep is er in geslaagd op al deze punten een positief resultaat te boeken. Ondanks verschillen in curriculum, in wettelijke randvoorwaarden, in taken en toedeling van verantwoordelijkheden is het mogelijk gebleken gemeenschappelijke kwaliteitsstandaarden te ontwikkelen en een gemeenschappelijk instrument samen te stellen om de kwaliteit van het wiskundeonderwijs te evalueren. Met behulp van dit instrumentarium kon een goed beeld verkregen worden van de bestaande kwaliteit van het wiskundeonderwijs op de deelnemende scholen.

In het project was het slechts mogelijk om op enkele scholen het projectonderzoek uit te voeren. Indien het aantal scholen groot genoeg zou zijn geweest en representatief voor een regio of land, dan zou het ook mogelijk zijn geweest de resultaten van de individuele scholen te gebruiken om een beeld te krijgen van de stand van zaken in een regio of een geheel land.
Daarmee zou een vergelijkingsbasis verkregen zijn voor regio's en landen onderling.
Het ontwikkelde instrument is niet alleen geschikt voor toepassing door externe evaluatoren, zoals inspecteurs, maar is tevens gemakkelijk te gebruiken door de scholen zelf, als instrument voor zelfevaluatie.
In het boek dat nu als eindverslag van het project is verschenen, wordt hierover uitvoerig verslag gedaan. Het volledige instrumentarium is daarin tot in detail opgenomen, waaronder de gebruikte set van kwaliteitsstandaarden. Daarnaast zijn gedetailleerde beschrijvingen opgenomen van de bezoeken die aan ieder land zijn gebracht, de resultaten per land en de nadere analyses van deze resultaten.

Opzet van het project

Het project is gedurende het schooljaar 1999-2000 uitgevoerd in een aantal scholen voor voortgezet onderwijs in negen Europese landen: Beieren, Engeland, Vlaanderen, Hessen, Ierland, Nederland, Noord-Rijn-Westfalen, Noord-Ierland en Portugal.

Inspecteurs (die allen tevens wiskundespecialisten zijn) van de betrokken landen hebben paarsgewijs scholen bezocht: een inspecteur van het land zelf, samen met een inspecteur van een ander land. Daartoe was een keten van bezoeken geconstrueerd (zie figuur 2).
Onafhankelijk van elkaar gaven de inspecteurs hun oordelen over wat zij aantroffen met betrekking tot het wiskundeonderwijs. De resultaten van deze gemeenschappelijke inspecties moesten een beter inzicht geven in de verschillen tussen de scholen van de deelnemende landen, gerelateerd aan de resultaten van het internationale TIMSS-onderzoek.
Om vergelijkbare resultaten te kunnen krijgen was het belangrijk om in alle deelnemende landen met één en hetzelfde instrumentarium te werken. Het geconstrueerde instrumentarium heeft niet alleen betrekking op organisatorische aspecten van wiskundeonderwijs, maar ook op kwalitatieve aspecten daarvan. Daartoe is in het instrument een set opgenomen van 30 kwaliteitsindicatoren met betrekking tot wiskundeonderwijs. Voor de uitvoering van de gemeenschappelijke inspecties was het van groot belang dat alle deelnemers 'met dezelfde ogen' naar wiskundeonderwijs zouden kijken. Daarom is er grote aandacht besteed aan een intensieve training met betrekking tot het observeren van en het oordelen over wiskundelessen. Na deze training is het project daadwerkelijk van start gegaan.

Instrumentarium van het project

De projectgroep heeft een gedetailleerde beschrijving gemaakt van alle stappen die voor het evaluatieproces op de deelnemende scholen gezet moesten worden. Dat betreft onder andere de selectie van scholen, de voorbereiding van het bezoek, de wijze waarop de gegevens verzameld zouden worden, de inrichting van het bezoek, de verwerking van de gegevens die het bezoek opleverde tot een rapport. Op deze plaats is het niet zo zinvol om dit alles te beschrijven. Wel is het van belang te vermelden dat de gegevens verzameld zijn door middel van documentanalyse, observaties van wiskundelessen, gesprekken met wiskundedocenten, met wiskundesecties en met leerlingen. En dit alles volgens uniforme, door ieder te hanteren, richtlijnen.
De details zijn beschreven in het eerder genoemde boek.

De kwaliteit van het wiskundeonderwijs

De set van de 30 kwaliteitsindicatoren zijn in vier clusters van kwaliteitsaspecten verdeeld. Zij zijn als volgt geformuleerd (hier in Nederlandse vertaling):

Deel 1 - Wiskundige inhoud en behandeling
1. de leerlingen maken gedurende de les wiskundige vorderingen;
2. de leraar gebruikt contexten;
3. de leraar stimuleert het wiskundige denken van de leerlingen;
4. wiskundetaal en wiskundeterminologie worden in voldoende mate gebruikt;
5. er worden verbanden gelegd met andere wiskunde-onderwerpen;
6. er worden verbanden gelegd met andere vakken.

Deel 2 - Aspecten van interactie en communicatie
1. er wordt gebruik gemaakt van een behoorlijke variëteit aan soorten vragen en opgaven;
2. er is sprake van goede interacties (leraar-leerling, leerling-leerling);
3. er is sprake van adequate mondelinge feedback;
4. de leraar treedt motiverend op;
5. er wordt adequaat gebruik gemaakt van bijdragen van leerlingen;
6. de leraar maakt gebruik van onbegrepen zaken om voortgang te boeken;
7. de leraar toont respect voor de leerlingen;
8. de leerlingen hebben vertrouwen in de leraar;
9. er bestaat een goede klassesfeer.

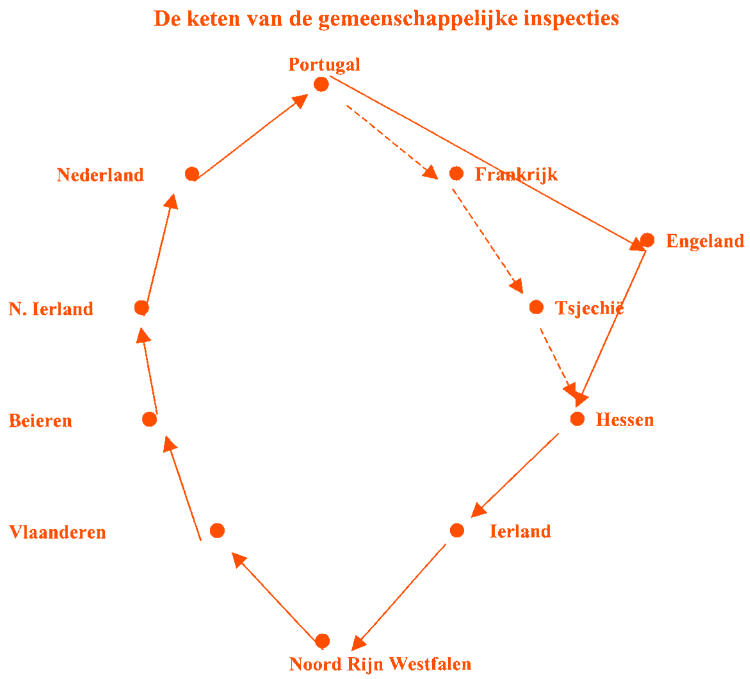
Deel 3 - Organisatorische aspecten van de les
1. er bestaat een goed tijdmanagement in de les;
2. er heerst een goede werksfeer;
3. de uitleg van de leraar is duidelijk;
4. het niveau van de leerlingactiviteiten past bij de leerlingen;
5. de leraar houdt rekening met verschillen tussen leerlingen;
6. de leraar houdt de vorderingen van de leerlingen bij door observatie;
7. de leraar houdt de vorderingen van de leerlingen bij door toetsing;
8. er wordt een goed gebruik gemaakt van leermateriaal;
9. er wordt een goed gebruik gemaakt van calculators;
10. er wordt een goed gebruik gemaakt van computers;
11. het door leerlingen gemaakte huiswerk wordt gecontroleerd door de leraar;
12. het opgegeven huiswerk is adequaat zowel naar hoeveelheid als naar niveau.

Deel 4 - Algemene aspecten
1. Zijn de leraren probleem-georiënteerd bij de introductie van nieuwe wiskunde?
2. Evalueren leerlingen hun eigen leerproces?
3. Leren leerlingen door samenwerking en onderlinge communicatie?

De oordelen van de inspecteurs op elk van deze 30 indicatoren werden op een vierpuntsschaal uitgesproken ('zwak' of 'kwam zelden voor', 'meer zwak dan sterk' of 'kwam soms voor', 'meer sterk dan zwak' of 'kwam vaak voor', 'sterk' of 'kwam vaak voor').

Gebruik als zelfevaluatie-instrument

Het gehele instrumentarium is zonder meer direct te gebruiken door wiskundesecties zélf, als zogenoemd 'zelfevaluatie-instrument'. Het samen als wiskundedocenten van een school evalueren van je eigen onderwijs is heel stimulerend en kan ook een heel samenbindend effect hebben. Dat alleen al maakt



FIGUUR 2

het meer dan waard om dit eens uit te proberen. In het boek staat uitvoerig beschreven welke stappen er dan concreet gezet moeten worden. Dat wijst zich verder vanzelf. Wel is het zaak om van tevoren met elkaar af te spreken welke elementen je graag geobserveerd wilt zien. Dit speelt vooral bij de bovengenoemde lijst van kwaliteitsindicatoren. Ik geef een paar voorbeelden.

Voorbeeld 1
1.1. De leerlingen maken gedurende de les wiskundige vorderingen.
Voor de collega die komt observeren, zou het na afloop van de les duidelijk moeten zijn dat de les zin gehad heeft, namelijk dat de leerlingen met meer/andere kennis en vaardigheden het lokaal verlaten dan toen ze binnenkwamen. Wanneer dat niet zo is, dan kun je je afvragen wat de zin van de les geweest is. Maar hoe observeer je dat dan? In sommige gevallen heeft de docent van te voren aan de leerlingen duidelijk gemaakt welk doel de betreffende les heeft. Dan is het relatief eenvoudig om te checken of dit doel gehaald is. In veel andere gevallen is het doel niet expliciet aangegeven, maar impliciet is het vaak wel duidelijk. Maar ook zijn er natuurlijk situaties waarin leerlingen gedurende de les ‘alleen maar’ sommen maken. Ook dan heeft de observerende collega natuurlijk direct in de gaten of de leerlingen er op gespitst zijn een stapje verder te komen en of de docent in kwestie alle moeite doet om individuele hulp en/of groepshulp te bieden bij het overwinnen van moeilijkheden. In ieder geval heb je als observator en als docent na afloop van de les vrijwel altijd gespreksstof te over om te bespreken of leerlingen vorderingen hebben gemaakt.

Voorbeeld 2
1.3. De leraar stimuleert het wiskundige denken van de leerlingen.
Dit is natuurlijk een lastig punt. Je kunt nu eenmaal niet in de hoofden van de leerlingen kijken en daarmee is rechtstreekse observatie van het wiskundige denken erg lastig. Maar het gaat hier om de observatie van wat de leraar doet. Stimuleert hij door vraagstelling en optreden dat leerlingen zelfstandig gaan nadenken? Dus: zijn de vragen die de docent stelt zó slim dat hij/zij het antwoord niet op een presenteerblaadje aanbiedt, maar dat door de vragen de leerlingen wel uitgedaagd worden hun eigen denken in gang te zetten? Ook op dit punt zullen observator en docent soms/vaak van mening verschillen: wat de één een stimulerende vraag vindt, vindt de ander soms een triviale, het antwoord weggevende opmerking. De discussie hierover geeft in ieder geval aanleiding tot boeiende en vruchtbare gesprekken en leidt in vrijwel alle gevallen tot een nadere bewustwording van het eigen didactische handelen.

Samenvatting van de resultaten

In het boek wordt uitvoerig beschreven wat de resultaten waren die in de scholen per deelnemend

land werden gevonden. Vanwege het relatief geringe aantal deelnemende scholen kon hieruit geen conclusie voor het desbetreffende land als geheel getrokken worden. Maar het was wel opvallend dat de resultaten over het algemeen in de lijn lagen van die van het grote TIMSS-onderzoek.
Per deel neem ik er een enkel punt uit.

Deel 1 - Wiskundige inhoud en behandeling
Contexten werden nog niet in alle scholen van de deelnemende landen als functioneel onderdeel gebruikt. Uiteraard is dit een gevolg van het vigerende curriculum in het desbetreffende land.
Opvallend en verrassend was dat aangegeven werd dat in lang niet alle gevallen het wiskundige denken van de leerlingen gestimuleerd werd door de leraren. (Zie ook het uitgewerkte punt hierboven onder 'De leerlingen maken gedurende de les wiskundige vorderingen'.)
Commentaar/discussiepunt van mij: Zou dit nu niet een punt zijn dat onafhankelijk is van het te behandelen wiskunde-onderwerp; zou niet in íedere wiskundige situatie de specifieke manier van wiskundig denken in de lessituatie beoefend en gestimuleerd moeten/kunnen worden? Zou ontwikkeling van wiskundig denken niet tot één van de eerste doelen van het wiskundeonderwijs moeten behoren, op welk niveau en in welke klas ook?

Deel 2 - Aspecten van interactie en communicatie
Hierin wordt in zeer veel scholen hoog gescoord. Kunnen we dit zó interpreteren dat we gewoon te maken hebben met wiskundeleraren die hun vak goed verstaan?
Wel was het opvallend dat niet in alle, noch in de meeste gevallen, fouten van leerlingen of door leerlingen onbegrepen zaken als aangrijpingspunt genomen werden voor verbetering.
Commentaar/discussiepunt van mij: Behoort het niet tot het wezenskenmerk van het leerling-zijn, dat hij/zij dingen (nog) niet weet/kan/kent en dat het onbegrepene het natuurlijke beginpunt is (moet zijn) van het leerproces?

Deel 3 - Organisatorische aspecten van de les
In dit deel wordt eveneens behoorlijk hoog gescoord. Wel bestaat er natuurlijk een behoorlijk verschil in gebruik van rekenmachines en computers, afhankelijk van de situatie in het desbetreffende land.

Deel 4 - Algemene aspecten
De genoemde aspecten zijn basaal voor het leer-proces. Natuurlijk zijn dit geen nieuwe inzichten, maar ze zijn in de afgelopen jaren weer duidelijk nieuw leven ingeblazen. Voor sommige leraren in de diverse landen betekenen deze aspecten toch een nieuwe wijze van omgaan met leerstof en leerlingen. Het bleek duidelijk dat de meeste leraren die aan het project deelnamen het belang van deze aspecten inzagen en zoveel als het hen mogelijk was deze probeerden toe te passen.

Conclusies

Het gehele project heeft geleid tot een behoorlijke lijst van conclusies en aanbevelingen. Voor het volledige overzicht verwijs ik weer naar het boek zelf.
Hier vermeld ik alleen dat het project een groot succes was in de zin dat er een tamelijk volledig instrumentarium is ontwikkeld waarmee kwalitatieve aspecten van het wiskundeonderwijs op een school in kaart gebracht kunnen worden.
Een wiskundesectie zou dit zelf ter hand kunnen nemen. Zo'n actie leidt dan onherroepelijk tot een grotere bewustwording van de kwaliteit van het centrale proces waarvoor de wiskundeleraar en de wiskundesectie verantwoordelijk zijn. De uitkomsten zouden dan vervolgens gebruikt kunnen/moeten worden voor verbeteracties op onderdelen. Zo kan dit instrumentarium dienstig zijn binnen het proces van kwaliteitszorg op de school.
Maar ook kan het door externe evaluatoren (de inspectie, (universitaire) onderzoeksinstituten) gebruikt worden om de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in een regio of land in kaart te brengen en te vergelijken met de kwaliteit in andere regio's of landen. Daartoe moet het aantal en de keuze van de deelnemende scholen natuurlijk voldoen aan bekende statistische criteria.
Inmiddels hebben de inspecteurs uit de verschillende landen die dit project hebben uitgevoerd er ontzettend veel van geleerd. Alleen al het over de eigen grenzen (letterlijk en figuurlijk) heen kijken was leerzaam en horizonverbredend. Ik zou wensen dat vele leraren de gelegenheid zouden krijgen hun ervaringen te kunnen uitbreiden door elders het wiskundeonderwijs, gegeven door collega's, te observeren.

Noten

[1] De volledige tekst van het boek is beschikbaar op internet, op de site van SICI: wwvw.sici.org.uk
(Aanklikken op de homepage onder de Index: Mathematics Project, waarna de inhoudsopgave van het boek wordt getoond. Vervolgens aan het eind van deze inhoudsopgave aanklikken: Full Report, waarna de volledige tekst verschijnt.)
[2] (Red.) TIMSS, Trends in International Mathematics and Science Study (voorheen: Third International Mathematics and Science Study), is een internationaal vergelijkend onderzoek onder 13/14-jarigen (in Nederland: tweedeklassers) met betrekking tot hun prestaties op het gebied van de exacte vakken. Het onderzoek bestaat uit een schriftelijke wiskunde- en sciencetoets en een praktische vaardigheidstoets. TIMSS vond/vindt plaats in 1995, 1999 en 2003.

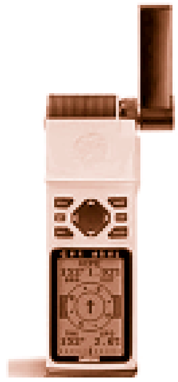
Over de auteur

Drs. Wim Kleijne (e-mailadres: w.kleijne@owinsp.nl) is wiskundige, oud-docent wiskunde en coördinerend inspecteur van het onderwijs b.d.

GESPREKKEN MET SJAAK

De auteur, onderzoeker aan het Freudenthal Instituut, voert regelmatig gesprekken met schoonmaker Sjaak over wiskundige onderwerpen. Aflevering 2.

[Jan van den Brink]



FIGUUR 1

Apparatengek

Film, tv, computer, internet, een 'bakkie' ('Ik heb er eentje: een 27MC-zender van 40 watt op 12 volt'), en zelfs een heel drumstel – Sjaak heeft alles. Hij is apparatengek.
Sjaak (43) is schoonmaker op ons instituut, heeft alleen lom-onderwijs genoten maar bezit een bijzonder grote interesse voor alles wat met de aarde, de zon en de maan te maken heeft. Ook apparaten en instrumenten hebben zijn voorliefde. Hij speelt er graag mee. Hoe werkt het en waartoe dient het - dat interesseert hem in hoge mate. Iets voor het speciaal onderwijs?

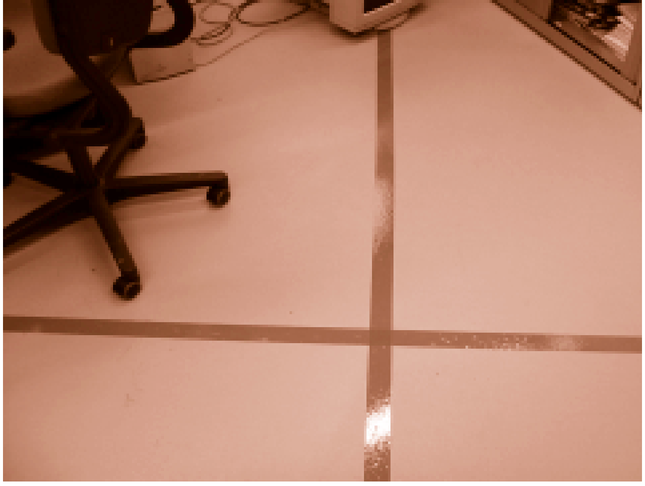
GPS

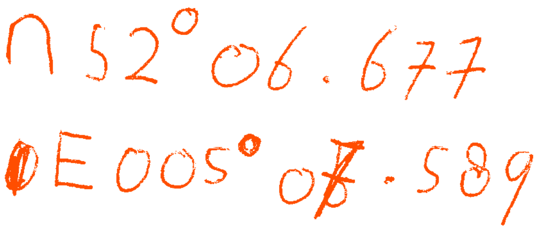
Op mijn tafel ligt een apparaatje*;* zie figuur 1.
'Wat is dat eigenlijk?', vraagt Sjaak.
'Een GPS', zeg ik. 'Overal op aarde kan je erop zien waar je je op dat moment bevindt.' Sjaak is meteen één en al oor.
'In vrachtauto's hebben ze, naast een bakkie, ook grote GPS-systemen', weet hij. 'Maar dit is zo'n lekker klein dingetje!' Voorzichtig, bijna teder, pakt hij de GPS beet. 'Hij werkt op satellieten, hè?', vraagt hij. 'Weet jij ook hóé?' Ik leg hem het GPS-principe uit en Sjaak levert in dat gesprekje een schitterende bijdrage, ingegeven door een ander apparaat: de tv.
'De GPS kan een satelliet hoog boven de aarde horen zingen tussen al het radiogeruis door', begin ik, 'omdat de GPS precies hetzelfde liedje zingt als de satelliet boven, op hetzelfde moment. Alleen, de satelliet-melodie komt wat later aan bij de GPS, die heeft reistijd nodig om de afstand te overbruggen.'
Sjaak valt me direct bij: 'Net als de tv-correspondent in New York. Ik heb wel eens zitten tellen hoeveel seconden het duurde voordat hij antwoord gaf.'
Ik sta versteld; meer hoef ik eigenlijk niet uit te leggen.
Sjaak kent al het GPS-principe om afstanden met naijlen in tijd te meten. Sterker nog: hij ontdekte het zelf.

Elk huis zijn kruis

Ik vertel hoe hij de GPS moet hanteren: aanzetten, scrollen door de pagina's. Bij de *position page* vraagt hij: 'Wat betekenen die getallen?'
'Noorderbreedte en oosterlengte.' Maar dat zegt hem niets. Hoe is het duidelijk te maken? Ik pak de globe: 'Hier staan strepen op.' Sjaak: 'Ja, van pool tot pool.'
'Oké, maar waar loopt nou zo'n streep hier door de kamer?'
'Hier, door de kamer?', Sjaak kijkt me verbaasd aan, 'Strepen?'
'Ze staan toch ook op de globe', houd ik vol. Sjaak mag vreemde vragen stellen, maar ik ook! Dat was onze afspraak.
'Van pool tot pool?' herhaalt Sjaak, maar haalt zijn schouders op.
'Waar ligt dan de noordpool', vraag ik, 'en de zuidpool?'
Dan slaakt Sjaak een kreet: 'Nou snap ik pas het *kompas*!' Weer is het een apparaat dat hem helpt, dat hem in staat stelt de richting van een meridiaan dwars door mijn kamer te vinden.

Een dag later trek ik op mijn knieën met behulp van een kompas en een potlood zo'n noord-zuid-lijn over de grond. Sjaak staat erbij te kijken. 'Die poets ik straks wel weer weg', zegt de schoonmaker.
Ook op de globe tekenen we een stukje van 'dezelfde' meridiaan.
Sjaak tekent de tweede streep, de parallelcirkel, op de globe, en in de kamer, haaks op de eerste lijn.
Verheugd wijst hij op de twee kruisen, één op de vloer en één op de globe: 'Ik snap het. *Daar zitten we.'*





FIGUUR 2

FIGUUR 3

Meestal pas je een model (een globe, bijvoorbeeld) aan de wereld aan. Maar hier deden we het omgekeerde, realiseer ik me achteraf, door lijnen te trekken over mijn vloer overeenkomstig het globemodel. Dat sloeg overigens in als een bom: de denkbeeldige meridiaan werd een waarneembare noord-zuid-lijn in de echte wereld van Sjaak en mij.

Later, ter gelegenheid van de feestelijke opening van het Freudenthal Instituut, hebben we opnieuw een kruis op de vloer gemaakt met een feestelijk bedoelde prijsvraag: *'Waar staat het Freudenthal Instituut? Welke coördinaten horen bij dit kruis?'* Zie figuur 2.
Sjaak won de prijs.
Niemand anders wist namelijk het antwoord te vinden dat Sjaak daags te voren had opgetekend van de GPS. Blijkbaar kun je niet altijd zonder apparaatje.

Wat zijn de standen?

'Je moet hem goed vast houden', zegt Sjaak bezorgd. We hangen met de GPS ver buiten het raam. Binnenshuis werkt de GPS namelijk alleen als simulator. Het apparaat geeft tenslotte onze positie weer in coördinaten noorderbreedte en oosterlengte. Sjaak vraagt: 'Wat zijn de standen?', en hij noteert ze. Maar getallen vormen niet zijn sterkste kant. Hij tékent ze na, heel nauwgezet, vanaf de GPS op een blaadje; zie figuur 3.
'Nederland ligt op 52° N', lees ik en vraag: 'Is dat dichterbij de Noordpool op 90° of dichterbij de Evenaar op 0°?' Geen gemakkelijke rekenopgave voor Sjaak, denk ik. Zijn oplossing is echter het ei van Columbus: hij grijpt direct de globe van de kast en laat het antwoord zien: 'Dichterbij de Noordpool'. Met de globe is weer een nieuw 'apparaat' aan zijn arsenaal toegevoegd.

Iets voor het onderwijs?

Sjaak heeft een zucht naar vraagstukken over waarneembare dingen in zijn *echte* omgeving, in het hier-en-nu. Zoals de zon en de aarde met bijbehorende vraagstukken als plaatselijke en zomertijd. Ook apparaten en instrumenten (tv, film, GPS, kompas) staan met hun specifieke problematieken in zijn belangstelling: ze behoren eveneens tot zijn wereld. Hij houdt van apparaten, hij is er gek op. Hij speelt ermee, experimenteert met het naijlverschijnsel op tv, koppelt er soms wiskundige objecten aan vast (de meridiaan aan het kompas) en vertaalt heen en weer van apparaat naar wiskundig model (van GPS naar globe). Kortom, *tussen de echte wereld en de wiskundige modellen staan, voor Sjaak, de apparaten.* Deze invloed van instrumenten op de wiskundige begripsvorming is ook voor het onderwijs misschien niet eens zo gek.

Wordt vervolgd!

Over de auteur

Dr. Jan van den Brink (1942; e-mailadres: janvdb@fi.uu.nl) was onderwijzer, studeerde wiskunde (lo, mo, doctoraal zuivere wiskunde) en is werkzaam als ontwerper/onderzoeker van reken- en wiskundeonderwijs aan 4- tot 18-jarigen aan het Freudenthal Instituut. Zijn belangstelling gaat vooral uit naar wiskunde die ontdekt of uitgevonden wordt door lerenden (leerlingen en anderen) teneinde daarbij passend onderwijs te ontwerpen en te onderzoeken.

ANALYSE VAN DE FASCINATIE

Een bespreking van 'Learning algebra in a computer algebra environment', het proefschrift van Paul Drijvers

[Jos Tolboom]

Inleiding

Op 25 september 2003 promoveerde Paul Drijvers, medewerker van het Freudenthal Instituut, op het proefschrift 'Learning algebra in a computer algebra environment; design research on the understanding of the concept of parameter'. Een goed moment om, na lezing van het ruim 350 pagina's tellende boek, de volgende vragen te stellen:

1. Helpt een computeralgebrapakket bij het begrijpen van een algebraïsch concept?
2. Wat betekent de uitkomst van dit onderzoek voor de praktijk van de wiskundedocent?

Wat is nieuw en wat niet?

Alle Informatie- en Communicatietechnologie (ICT) dwingt docenten tot steeds weer dezelfde principiële keuzen:

- Gebruik ik ICT in mijn onderwijs?
- Hoe doe ik dat?
- Met andere woorden: wat voeg ik toe en wat laat ik weg?

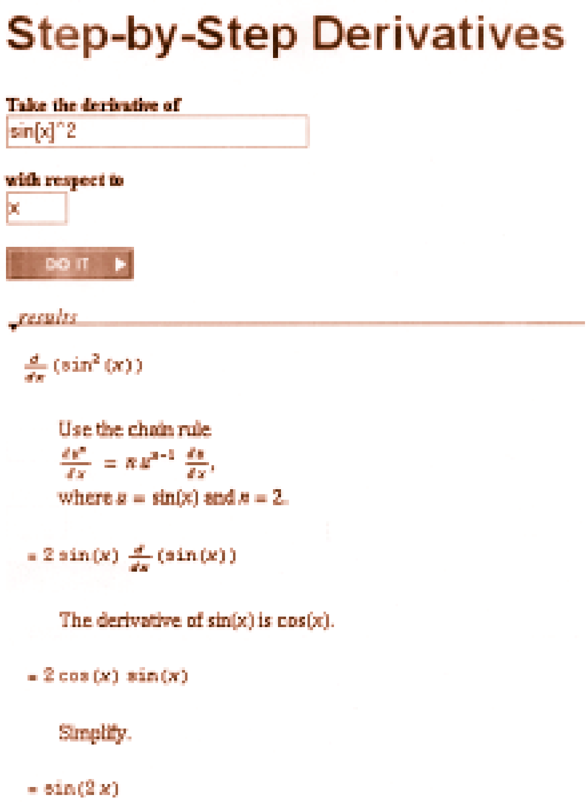
Voor een goede beantwoording van die laatste vraag moet je weten hoe het leren van leerlingen mogelijk kan veranderen door ICT in te voeren. Dat is precies wat Paul Drijvers doet in zijn proefschrift.
De vorige grote ICT-revolutie in het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs was de invoering van de grafische rekenmachine. Daarover is veel gepubliceerd (zie bijvoorbeeld [9]). De vraag is altijd: wat verandert invoering van de nieuwe technologie? De centrale onderzoeksvraag uit het onderzoek van Van Streun, Harskamp en Suhre[9] luidde: 'Wat verandert er aan de door leerlingen gehanteerde oplossingsstrategieën door gebruik van de Grafische Rekenmachine?' Deze vraag kan worden overgenomen in een onderzoek waarbij 'Grafische Rekenmachine' wordt vervangen door 'Symbolische Rekenmachine' of 'Computeralgebra'.
Weigand en Weller (zie [12]) onderzochten veranderingen in werkstijl van leerlingen (in het voorexamenjaar van een Duits gymnasium) onder invloed van een computeralgebra-systeem (CAS). Zij rapporteerden: 'Leerlingen gebruikten meer CAS in hun oplossings-strategieën dan we verwachtten. Het probleem zit hem in het ontwikkelen van *succesvolle* oplossingsstrategieën met CAS. Daarvoor is het noodzakelijk om over basiskennis te beschikken, bijvoorbeeld in het herkennen van prototypes van functies' [vertaling van de recensent]. Uit beide studies blijkt dat CAS niet onmiddellijk de hemel op aarde oplevert, maar dat er veel mogelijkheden voor zinvolle leerlingactiviteiten door ontstaan.

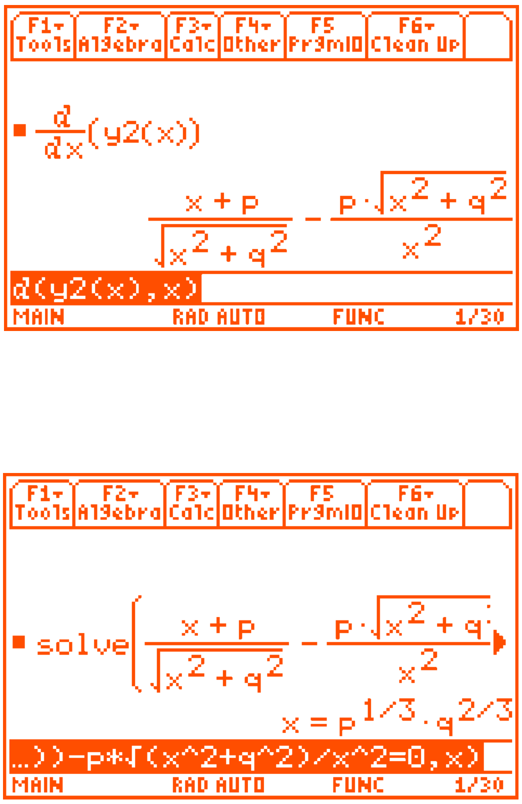
Wat is computeralgebra (CA)?

Wellicht is het gedeelte 'algebra' in het woord 'computeralgebra' enigszins verwarrend. Het is heel lastig een definitie te geven van algebra waar alle algebraïci zich in kunnen vinden. In academische context wordt onder *algebra* verstaan: 'het deel van de wiskunde dat zich bezighoudt met de op gegeven verzamelingen bestaande structuren waarvoor één of meer bewerkingen (operaties) zijn gedefinieerd' [11].
Een computeralgebrasysteem wordt ook gebruikt voor functieonderzoek, en dus eigenlijk op het gebied van de analyse. Limieten, afgeleide en primitieve functies bepalen, stelsels van vergelijkingen oplossen, algebraïsche uitdrukkingen vereenvoudigen en dat allemaal met behoud van de variabele(n) en parameter(s): een CAS kan dat allemaal, en sneller dan welk menselijk wiskundewonder ook (zie ook [6]).

Computeralgebra is niet splinternieuw (zie [5]).
Paul Drijvers schrijft in zijn voorwoord: 'Toen ik in de jaren tachtig voor het eerst in aanraking kwam met het MuMath pakket, was ik onder de indruk: dit was de

FIGUUR 1





FIGUUR 2

toekomst van het wiskundeonderwijs. Ik was gefascineerd door het fenomeen, en verwonderd door het feit dat een machine in staat was tot het uitvoeren van ingewikkelde procedures en algebraïsche vereenvoudigingen, technieken die ik als het hart van de wiskunde beschouwde' [geparafraseerde vertaling van de recensent].

Dat gevoel herkent iedere wiskundige en iedere wiskundedocent. Meteen daarop volgt natuurlijk de vraag: 'Wat impliceren deze technologische mogelijkheden voor het wiskundeonderwijs?'

Onderzoeksvragen en methodologie

Deze vraag is natuurlijk te 'grof' gesteld voor een wetenschappelijk onderzoek. Daarom moet hij worden aangescherpt. Dan kom je natuurlijk allereerst bij de vraag: '*Wat wil je met je wiskundeonderwijs?*'

Iedere docent met hart en verstand op de juiste plek zal antwoorden: 'Het inzicht in de wiskunde vergroten.' Dat brengt Drijvers bij de eerste verfijning van zijn onderzoeksvraag:

Hoe kan het gebruik van computeralgebra het inzicht bevorderen in algebraïsche concepten en operaties?

Omdat de algebra, zelfs dat gedeelte dat op het voortgezet onderwijs wordt bestudeerd, een te groot gebied is, zal hij daar ook nog een beperking op aan moeten brengen:

Hoe kan het gebruik van computeralgebra bijdragen aan en hoger niveau van inzicht in het parameterbegrip?

Daarnaast heeft Drijvers gekozen voor de methode van het ontwikkelingsonderzoek. Dat is een manier van onderzoek doen die zichzelf ten doel stelt theorieën en instructiemateriaal te ontwikkelen ten behoeve van een empirisch gebaseerd onderzoek van 'hoe het leren werkt'. Dat betekent dat:

1. de onderzoeker nieuw, op bepaalde vooronderstellingen gebaseerd, lesmateriaal moet ontwikkelen;
2. dat in de les moet inzetten;
3. het gebruik moet observeren;
4. de leerresultaten moet analyseren op basis van de a priori verwachtingen;
5. op basis van die observaties en analyses het lesmateriaal en eventueel de vooronderstellingen moet bijstellen;
6. daarna volgt de volgende ronde lesexperimenten, net zolang tot de onderzoeksvraag naar tevredenheid beantwoord kan worden.

Dit type onderzoek levert - door de stappen 5 en 6 - onderzoeksdata die men 'ecologisch valide' noemt. Dat wil zoveel zeggen als: *gebaseerd op gebruik in echte onderwijssituaties*. Het voordeel voor het onderwijsveld is dat er modern lesmateriaal ontwikkeld wordt, dat de gevonden onderzoeksresultaten bruikbaar zijn in de les van alledag en dat het de mogelijkheid biedt experts uit de praktijk (docenten in de klas) te betrekken bij het onderzoek. Dat maakt het onderzoek effectiever (althans als de doelstelling onder meer was dat het voor de onderwijspraktijk nuttig moet zijn) en maakt het werk van de docenten interessanter.

Wat is er aan CAS voorhanden?

Veel softwarefabrikanten brengen een pakket voor CA (computeralgebra) op de markt. Die pakketten variëren van academisch-professioneel tot licht-gratis.
Enkele belangrijke zijn:

1. Mathematica
2. Mathlab
3. MathCad
4. Maple
5. Reduce, Axiom, Magma, Pari (open source)
6. Derive
7. TI-Interactive (zie *http://education.ti.com/us/product/software/tii/features /features.html*)
8. Studyworks mathematics (zie *www.studyworksonline.com/*)
9. Scientific Notebook (zie *www.mackichan.com/*)
10. Applets, zoals WIMS (zie *http://wims.unice.fr/*), WIRIS (zie *www.wiris.com/demo/en/*), Webmathematica (zie *http://library.wolfram.com/explorations/* en figuur 1).

De pakketten tot en met 6 richten hun vizier op professionele gebruikers en het hoger onderwijs. De producten 7, 8 en 9 zijn primair bedoeld voor het voortgezet onderwijs en bieden een combinatie van computeralgebra en tekstverwerking. Afdeling 10 (applets) is een ontwikkeling die niet los kan worden gezien van de pakketten voor CA. De grote fabrikanten hebben allemaal middelen ontwikkeld om CA ook op het web te bedrijven, waarvan veel op basis van applets is gerealiseerd.
Daarnaast is er nog de mogelijkheid van de 'rekenmachines' (die inmiddels net als grote computers veel meer kunnen dan alleen rekenen). De TI-89, de TI-92, de TI Navigator, de Casio ClassPad en de Casio Algebra FX 2.0 bieden standaard CA-faciliteiten. Voor de TI-83 Plus zijn applets te downloaden die CA-activiteiten mogelijk maken. De keuze voor een platform (handheld of desktop computer) hangt als altijd af van de doelstelling. Grofweg kan men zeggen:
- de desktop computer heeft de voordelen van de hoge schermresolutie, kleuren en eenvoudige koppeling met andere applicaties;
- de handcomputer heeft het voordeel van 'altijd aanwezig', eenvoudig in te zetten in (een deel van) de les.
Drijvers koos in de experimenten waarop hij dit onderzoek baseert voor de TI-89/92 (zie figuur 2).

Hans Klein (Zernike College te Haren, Groningen) heeft in zijn onderwijs inmiddels ruime ervaring opgedaan met CA (zie [7] en Kleins website op *http://home.planet.nl/~hklein/compalg/*). Daar is voor een geïnteresseerde docent wiskundemateriaal te vinden (gebaseerd op TI-Interactive, maar ook te gebruiken voor andere CA) waarmee men bijvoorbeeld het keuzeonderwerp voor vwo Wiskunde A12 en Wiskunde B1 en B12 van 40 studielasturen kan invullen.
Ook Paul Drijvers zelf levert op zijn site (*www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation/*) materiaal waarmee een docent direct aan de slag kan (leerlingteksten en programma's voor de TI-89/92); zie ook [2].

Bevindingen van het onderzoek

De vragen die ik stelde aan het begin van dit artikel, worden door het onderzoek van Drijvers als volgt beantwoord:
1. Helpt CAS bij het begrijpen van een algebraïsch concept?
Ja, het helpt, bijvoorbeeld bij het verkrijgen van het inzicht van de parameter als *veranderlijke*; bijvoorbeeld in de vraag: hoe beïnvloedt de parameter a de vorm van de grafiek van de functie $f : x \rightarrow ax^2$. Dat kan overigens ook worden bereikt met pakketten als Geocadabra (zie [10]) en VU-Grafiek (zie [3] en [4]).
Daarnaast bevorderde het gebruik van CAS het begrip van de parameter als *generalisator*, bijvoorbeeld het inzicht dat de top van de parabool weergegeven door de grafiek van $f : x \rightarrow (a - x)^2 + a$ zich voor alle waarden van a bevindt in (a, a).
2. Wat betekent de uitkomst van dit onderzoek voor de praktijk van de wiskundedocent?
Tijdens het onderzoek bleek dat, in tegenstelling tot de werkhypothese, referenties aan realistische (betekenisvolle) probleemsituaties als beginpunt niet gemist konden worden tijdens werken met CAS. Omdat inzet van CAS het 'algebraïsche speelveld' verruimt, wordt de rol van het interpreteren van de antwoorden belangrijker. De docent speelt een zeer belangrijke rol bij het leerlingen laten reflecteren op de oplossingsprocedures en het vertalen daarvan naar wiskundig correcte denkschema's. Het is misschien indrukwekkend hoe snel jonge mensen een computer leren bedienen, maar daarmee is nog geen wiskunde bedreven. CAS biedt mogelijkheden, maar die moeten wel worden benut. Drijvers schrijft: 'Door een gebrek aan inzicht in de structuur van expressies en formules (*symbol sense*; zie [1]) maakten leerlingen fouten bij het werk in de computeralgebra-omgeving, maar deze problemen leidden ook tot een nadere blik op deze structuren. In die zin brachten de obstakels ook kansen voor het leren met zich mee, als de docent daar adequaat mee omging.'

'leerlingen ontwikkelden symbol sense'

Drijvers concludeert ook dat het van belang is dat er een evenwicht wordt gecreëerd tussen CAS-techniek, mentaal beeld en pen-en-papier-techniek en de transparantie van de CAS-procedures. Een lastige, maar alweer belangrijke rol van de docent.
Het onderzoek heeft concreet lesmateriaal opgeleverd waarmee docenten aan de slag kunnen. Daarnaast is het een belangrijke stap in het – in mijn ogen onvermijdelijke - invoeren van enige vorm van CAS in het voortgezet onderwijs. Dat zal eerst in de bovenbouw havo/vwo gebeuren, maar later ook verder 'de school indalen', zoals dat ook met een pakket als Cabri gebeurt (zie [8]).
Hopelijk zal dit onderzoek ertoe bijdragen dat nog meer docenten zich uitgedaagd voelen te experimenteren met CAS, het materiaal dat er nu al is en de aanbevelingen die het onderzoek tot nu toe heeft opgeleverd. Het zou overigens fraai zijn als er op een centrale plaats, bijvoorbeeld op WisBase (*www.wisbase.com*), een uitwisselingsplaats zou komen voor lesmateriaal met CAS. Een korte zoektocht op het web leerde dat dit nog een leemte is; zelfs in de VS kwam ik niet verder dan de site *http://education.ti.com/us/product/software/tii/activities/activities.html*, waar 33 lespakketten voor TI-Interactive te downloaden zijn.

Terugschakelend naar de vraag uit het begin: *'Hoe kan het gebruik van computeralgebra het inzicht bevorderen in algebraïsche concepten en operaties?'*
Drijvers extrapoleert de resultaten van de deelonderzoeksdeelvragen naar dit algemenere niveau. Bovendien constateert hij dat sommige bevindingen opgedaan tijdens de experimenten betrekking hadden op algemenere zaken dan het primair onderzochte parameterbegrip. 'Leerlingen ontwikkelden *symbol sense*. CA bood de mogelijkheid verschillende representaties te combineren, procedures te herhalen als voorbereiding op generalisatie en expressies als objecten te behandelen.' Voorwaarden hiervoor waren wel een didactische inbedding en gebruik van betekenisvolle formules die voortkwamen uit realistische probleemsituaties.
Daarnaast leidde het opstellen van oplos- en subsitutieschema's tot nieuwe inzichten in het oplossen en substitueren. De rol van de docent bleek belangrijker dan vooraf was gedacht.
Die laatste conclusie is niet alleen een geruststelling voor diegenen die denken dat de opmars van de computer mensen overbodig maakt. Het is tevens een illustratie van hoe een veelbelovende nieuwe ontwikkeling (hier CAS) wordt ingebed in al het eerder verworvene, in plaats van al dat eerdere overbodig te maken of totaal overheersend te zijn over het eerdere. Heeft de telefoon ervoor gezorgd dat mensen elkaar niet meer of zelfs minder van gezicht tot gezicht spreken?

Conclusies

Al lezend krijgt men bewondering voor de strakke opzet en planning van de hoofdstukken en de experimenten, de theorievorming en onderbouwing vanuit de literatuur, de gedegenheid en de leesbare stijl. Als een goede docent staat Drijvers boven de materie en kan hij ingewikkelde dingen duidelijk maken. Maar bovenal: de passie voor wiskunde, onderwijs en de rol die ICT hierin kan spelen. De auteur begon met een fascinatie voor de mogelijkheden van CAS. In deze studie analyseert hij de mogelijke gevolgen van zijn fascinatie. En het prachtige van wiskunde(onderwijs) blijkt weer: analyse maakt de fascinatie niet stuk, maar versterkt hem juist.
En de recensent? Tja, die moet altijd iets te zeuren hebben. Vooruit dan: misschien zijn de experimenten in de klas kwantitatief niet overstelpend geweest en was het mooi geweest als er nog meer direct inzetbaar materiaal voor de leraar wiskunde uit was gekomen. De stellingen bij het proefschrift hadden nog ietsje scherper gemogen, maar daar houdt het dan ook echt mee op.
Drijvers levert een in mijn ogen voorbeeldig stuk werk af.

P.H.M. Drijvers: *Learning algebra in a computer algebra environment.*
CD-ß Press, Utrecht, isbn 90 73346 55 X, € 25,00.

Literatuur en noten

[1] A. Arcavi: Symbol sense / Informal sense making in formal mathematics. In: For the learning of mathematics, 14-3 (1994), pp. 24-35.
[2] P. Drijvers, P. Boon, W. Hoekstra: De leraar had het wel heel erg druk. In: Euclides 78-3 (2003).
[3] C. van de Giessen: The visualisation of parameters. In: M. Borovcnik, H. Kautschitsch (eds.): Technology in mathematics teaching / Proceedings of ICTMT5 (2002), pp. 97-100.
[4] C. van de Giessen: Parameters in beeld. In: Euclides 77-7 (2002).
[5] A. Heck: Computer algebra; ready to be used. In: Proceedings of the Dutch Unix Users Group conference fall 1996 (1996).
[6] K. Hoogland: Van algebra naar analyse. In: Euclides 70 (1995), pp, 260-263.
[7] H. Klein: Keuzeonderwerp Computeralgebra. In: Euclides 78-8 (2003).
[8] S. Kemme: Het traphekje; Cabri in basisvorming en VMBO. Euclides 77-4 (2002), pp. 176-178.
[9] A. van Streun, E. Harskamp, C. Suhre: The Effect of the Graphic Calculator on Students' Solution Approaches / A Secondary Analysis. In: Hiroshima Journal of Mathematics Education, 2000, 8 (2000).
[10] J. Tolboom, L. Tolboom: Het boek in de hoek. In: Nieuwe Wiskrant 23-1 (oktober 2003).
[11] J. Top: persoonlijke communicatie (2003).
[12] H. Weigand, H. Weller: Changes of working styles in a computer algebra environment. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning (2001), pp. 87-111.

Over de recensent

Jos Tolboom (e-mailadres: j.l.j.tolboom@fwn.rug.nl) is docent Bètadidactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen en ICT-redacteur van Euclides.

LESGEVEN IN TANZANIA

Impressie van een voorbijganger

[Gerben van Lent]

FIGUUR 1 Het huis van collega Regidius in Rubya





FIGUUR 2 Humura Sec. School (Rubya): theepauze in de stafkamer

Inleiding

Bas Lebbing was werkzaam als VSO science and maths teacher op Humura Secondary School in West-Tanzania van 2000 tot 2002.
VSO (Voluntary Service Overseas) is een internationale ontwikkelingsorganisatie met vestigingen in Engeland, Canada en Nederland. De organisatie zendt jaarlijks enkele honderden mensen met professionele ervaring uit om voor een periode van twee jaar in een ontwikkelingsland hun vak uit te oefenen in nauwe samenwerking met de lokale bevolking. Uitzending geschiedt in principe op basis van een lokaal salaris.

Het Wereldwiskunde Fonds heeft een ‘interview op afstand’ gehouden met Bas Lebbing.

Kun je een impressie geven van je lessen?

We zijn deze week de tweede helft van het schooljaar begonnen en zijn gestart met het onderwerp statistiek. Gisteren hebben we besproken waar je eigenlijk de informatie vandaan haalt als je statistiek wilt bedrijven, bijvoorbeeld over de koffieoogst in Tanzania door de jaren heen. Van de slager in het dorp misschien? Nee, dat dachten ze niet. Bij de overheid van ons district Muleba? Waarschijnlijk ook niet. Bij het Ministerie van Landbouw in Dar es Salaam wellicht? Ja, dan maak je een goede kans om de informatie te krijgen. Vandaag zijn we begonnen met de eerste voorbeelden van frequentiedistributie: zoals daar zijn de leeftijden van een derdejaarsklas. Na vijf keer hertellen kwamen we op het volgende plaatje uit: totaal aantal leerlingen 31 (een verademing in vergelijking met het eerste jaar waar we meer dan 50 leerlingen in een klas hebben), de meeste leerlingen zijn rond de 17 jaar, de jongste is 15, de oudste is 25. Zelf ben ik amper twee jaar ouder dan de oudste leerling, maar dat heb ik maar niet gemeld.

Hoe zijn de resultaten voor wiskunde?

Als voorbeeld in mijn statistiekles had ik net zo goed de wiskundeproefwerkresultaten van de leerlingen kunnen aanhalen, maar dat heb ik maar niet gedaan. Die cijfers zijn nogal confronterend, en het leek me pedagogisch gezien niet een geweldige zet om ze

tijdens hun wiskundeles te ontmoedigen met hun zeer matige prestaties over de afgelopen tijd. De feiten: de derdejaarsleerlingen die ik nu wiskunde geef, hebben aan het eind van het vorige jaar een officieel examen gedaan. Het gemiddelde van de 'arts'-vakken (talen, geschiedenis, etc.) was, naar Nederlandse maatstaven, een 4,4; het gemiddelde van de exacte vakken was een 3,0 met als tragisch dieptepunt een 0,9 (gemiddeld!) voor wiskunde. Toen ik het wiskunderesultaat zag, was mijn eerste impulsieve reactie: stuur ze allemaal maar weer terug naar de eerste klas. Maar ja, het systeem hier dicteert dat een leerling met een 3 gemiddeld voor alle vakken door mag naar het volgende jaar. Helaas is dit exemplarisch voor de meeste klassen op school en voor de meeste scholen in Tanzania.

Heb je een verklaring voor de slechte resultaten?

Een van mijn collega's kwam na kort beraad tot de suggestie om alle leerlingen met gemiddeld een 3 of minder voor wiskunde te laten doubleren. Een aardig idee, ware het niet dat we dan met welgeteld vier leerlingen in de derde klas zouden overblijven. Een 'crisis-onderzoekje' op school leverde een aantal knelpunten op.
De leerlingen droegen aan: 'We hebben te weinig tijd om ons huiswerk te doen, we hebben geen boeken, de docenten zijn niet goed genoeg en het is gewoon een veel te moeilijk vak.'
De docenten op hun beurt meenden: 'De leerlingen zijn ongedisciplineerd, leerlingen komen niet op tijd op school, leerlingen bereiden de lessen niet voor, leerlingen zijn gewoon dom.'
De leerlingen geef ik wat betreft hun eerste punt gelijk. Sommigen zijn anderhalf uur aan het lopen om op school te komen, en 's avonds in het donker huiswerk maken is vrijwel onmogelijk. Boeken om zelf uit te studeren hebben de leerlingen inderdaad tot voor kort nooit gehad, maar wat betreft wiskunde is daar met hulp van het Wereldwiskunde Fonds gelukkig nu verandering in gekomen.
Over mijn collega's kan ik niet geheel objectief oordelen, maar ik vind dat er over het algemeen, gegeven de vele beperkingen qua materiaal en lesomgeving, best een goede inzet getoond wordt door onze docenten.

Is er iets aan te doen?

Volgens mij is er op twee fronten belangrijke vooruitgang te boeken. Ten eerste zou het enorm helpen als op basisscholen meer aandacht zou worden geschonken aan zaken als ruimtelijk inzicht en logisch redeneren. Het credo is daar nog al te vaak 'stampen, stampen en nog eens stampen' en dat wreekt zich uiteindelijk als je op een middelbare school met een 'skill subject' als wiskunde begint. Veel basisscholen hebben klassen van zestig of meer leerlingen en geen enkele financiële armslag om lesmateriaal te kopen, maar ik denk dat er genoeg lokaal (goedkoop) materiaal voorhanden is om kinderen spelenderwijs te laten leren, al is het maar met zelfgezaagde en geschilderde blokken of puzzels. Ik ken verschillende Europese vrijwilligers die de afgelopen tijd hier in de regio ontzettend leuke dingen hebben weten te bereiken op dat gebied en mensen raken duidelijk enthousiast.
Ten tweede valt er qua aanpak op middelbare scholen ook het een en ander te verbeteren. Feit blijft dat je zonder boeken voor leerlingen (de gebruikelijke situatie) veel tijd kwijt bent aan het laten overschrijven van aantekeningen, want ze moeten thuis iets hebben om te studeren. Maar dan nog zijn er manieren om de leeromgeving aantrekkelijker en effectiever te maken. Als je hier bijvoorbeeld een willekeurig klaslokaal binnenloopt, is het eerste wat opvalt de totale afwezigheid van aankleding. Een klas is een hok met vier muren, een golfplaten dak, dertig houten banken en een schoolbord. Een verfje en een paar tekeningen aan de muur kunnen al een wereld van verschil maken; iemand moet alleen een keer het initiatief tonen. Geld hoeft niet altijd het probleem te zijn.
Verder zouden docenten hun creativiteit wellicht beter kunnen gebruiken om lesmateriaal te maken: geen hand-outs die vijftig keer gekopieerd moeten worden, maar met simpele middelen visuele hulpmiddelen maken.

Mooie woorden, maar lukt zoiets in de praktijk?

Bij wijze van experiment hebben we een tijdje geleden een workshop georganiseerd hier op school om met collega's visuele hulpmiddelen te maken. De dag begon met korte presentaties rond de vragen:
- Waarom gebruiken we visuele hulpmiddelen?
- Wat kunnen we ervoor gebruiken?
- Waar moet een goed visueel hulpmiddel aan voldoen?

's Middags was het tijd om de creativiteit de vrije loop te laten. Gezien de hoeveelheid tijd hebben we ons beperkt tot het maken van rijstzakposters. Deze zakken zijn, indien onbedrukt en opengeknipt, uitermate geschikt om met stiften om te toveren tot kleurrijke wandposters die jaren mee kunnen. Het resultaat was zeer bevredigend, er zaten fraaie creaties tussen en door de posters te bespreken konden er ook weer nieuwe ideeën opgedaan worden.
Een van de deelnemers uitte achteraf zijn tevredenheid als volgt in het evaluatieformulier: 'Hoewel deze workshop zes uur duurde, is men er toch niet in geslaagd de deelnemers ten prooi te laten vallen aan ernstige vermoeidheid.'
En nu hopen dat de nieuwe ideeën ook echt de weg naar het klaslokaal vinden...

Aanvullende informatie

- De bijdrage van het Wereldwiskunde Fonds van 641,00 was voldoende voor 105 boeken, inclusief materiaal om ze te kaften.
- Het e-mailadres van Bas Lebbing is baslebbing@hotmail.com
- Voor nadere informatie over VSO zie www.vso.org.uk of www.vso.nl

Over de auteur

Gerben van Lent (e-mailadres: jonglent@worldonline.nl) is secretaris van het WereldWiskunde Fonds.

Aankondiging / Nationale Wiskunde Dagen 10 Jaar!

[Michiel Doorman]

Als wiskundeleraar moet je van tijd tot tijd nieuwe ideeën op kunnen doen en creatief en actief met je vak bezig zijn. Dat kan door te luisteren naar een goed verhaal, door actief mee te doen in werkgroepen en door met collega's van gedachten te wisselen. De *Nationale Wiskunde Dagen* bieden die gelegenheid en zijn bedoeld voor alle wiskundeleraren die lesgeven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype. Deze dagen worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut.
De aanstaande Nationale Wiskunde Dagen krijgen een extra feestelijk tintje: het is de *tiende* keer! Denkt u al jaren: 'Daar moet ik eens naar toe!' maar kwam het er maar niet van, grijp dan nu uw kans.



FIGUUR 1

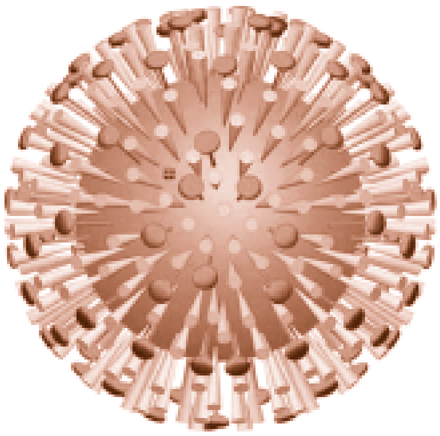
De rode draad in het programma wordt gevormd door drie hoofdlezingen en een groot aantal parallellezingen, gegroepeerd binnen thema's. De onderwerpen variëren van zuiver wiskundig tot onverwachte en risicovolle toepassingen. Getaltheorie, dijkdoorbraken, sport, mutaties van het griepvirus en wiskunde als inspiratie-bron voor kunstenaars passeren de revue. Bovendien zal worden teruggekeken op 10 jaar wiskunde in de basisvorming. Naast de lezingen en werkgroepen is er op de Nationale Wiskunde Dagen uiteraard nog veel meer te zien en te beleven.



FIGUUR 2 Kunstwerk van Henk Ovink

De tiende Nationale Wiskunde Dagen hebben plaats op *vrijdag 6 en zaterdag 7 februari 2004*, in het Congrescentrum NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout. Kosten all-in: € 340,00 (éénpersoonskamer), € 310,00 (tweepersoonskamer), € 280,00 (geen overnachting). Deelname kan de school betalen uit nascholings- en professionaliseringsgelden.

Wilt u naar de NWD komen? Vraag dan een folder met een aanmeldingsformulier aan (Freudenthal Instituut, tel. 030-2635555 of e-mail *nwd@fi.uu.nl*).
Tevens kunt u zich aanmelden via de NWD-website, *www.fi.uu.nl/nwd/* .



FIGUUR 3 Model van een griepvirus

Aankondiging / ICT-conferentie 2004

Voor het vierde achtereenvolgende jaar organiseren APS-wiskunde en Freudenthal Instituut een conferentie over het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs. Deze conferentie zal plaatsvinden op
donderdag 22 april 2004
op het 19e-eeuwse landgoed Vanenburg in Putten, dat voorzien is van 21e-eeuwse technologische faciliteiten. Het thema van deze conferentie luidt **'Hands-on en brains-on'** om aan te geven dat bij het werken in wiskundige ICT-omgevingen het verstand – gelukkig – niet op nul kan. In de lijn met dit thema zullen de werkgroepen allemaal een praktische component hebben. Een aantal werkgroepen richt zich op ICT-gebruik in de onderwijspraktijk, terwijl andere tot doel hebben de eigen ICT-vaardigheden te vergroten. Net als vorig jaar vindt er weer een 'Webstrite' plaats, waarin scholen strijden om de beste wiskundewebsite. U kunt zich on-line inschrijven op de conferentiesite *www.fi.uu.nl/ict/2004/* .

Aankondiging / ICME-10

Het 10e 'International Congress on Mathematical Education' (ICME-10) wordt gehouden te Kopenhagen (Denemarken) van **4 t/m 11 juli 2004**.
De ICME-congressen worden om de vier jaar gehouden, onder verantwoordelijkheid van de 'International Commission on Mathematical Instruction' (ICMI). Ze richten zich op wiskundedocenten en op onderzoekers op het gebied van het wiskundeonderwijs.
Nadere informatie vindt u op *www.icme-10.dk*

Mededeling / Wiskunde Olympiade 2004 [Fred Bosman]

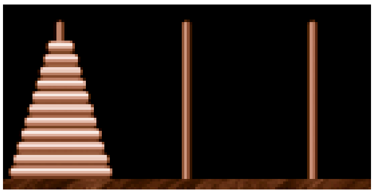
De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2004 vindt plaats op vrijdag 16 januari a.s. De opgaven zullen in de eerste week van januari 2004 worden verzonden naar de docenten die zich hebben opgegeven als wedstrijdleider van hun school.
Voor nadere informatie: *fred.bosman@citogroep.nl* of (026)3521294.

Puzzel 793 - Hanoi-variaties

De puzzel die bekend staat onder de naam *Torens van Hanoi*, is al zo vaak beschreven dat het onnodig lijkt om het hier nog eens te doen. Voor alle zekerheid doe ik het toch maar.
Er zijn drie pilaren, zeg A, B, C. Om pilaar A liggen n schijven, van onder naar boven in afnemende grootte. De bedoeling is om de schijven naar pilaar C te verplaatsen met de volgende spelregels.
(1) Je mag maar één schijf tegelijk verplaatsen.
(2) Je mag nooit een schijf op een kleinere schijf leggen.

De pilaren, in de speelgoed-uitvoering gewoon houten paaltjes op een plankje, zijn bedoeld om vals spelen tegen te gaan, maar in de praktijk zijn ze erg lastig. Dus ik doe het zónder, en spreek in het vervolg van 'velden'. De schijven hoeven dan niet van een gat te zijn voorzien. Bij n schijven is er een oplossing in $2^n - 1$ zetten; dat is het minimum.

Er bestaan diverse variaties op deze puzzel. De spelregels (1) en (2) blijven altijd van toepassing. Een voorbeeld van zo'n variatie is *vier* velden in plaats van drie. Het aantal zetten wordt natuurlijk kleiner, maar het is niet bekend hoeveel kleiner (bij n schijven).
Om met de opgaven aan de slag te gaan kan het handig zijn zelf schijven te maken. Ik maakte ze van karton: vierkante bakjes van 1 cm hoog die, als je ze ondersteboven zet, een stapel kunnen vormen. Er bestaat ook peuter-speelgoed dat goed te gebruiken is: cilinders of kubussen die in elkaar passen en die je ook kunt stapelen. Maar proberen met pen en papier is natuurlijk ook heel goed mogelijk.



FIGUUR 1

Opgave 1
We hebben drie velden en vijf schijven. De schijven zijn gekleurd: van boven naar beneden blauw, rood, wit, blauw, rood. Naast de spelregels (1) en (2) is er een extra eis: een schijf mag niet op een schijf van dezelfde kleur worden gelegd. De bedoeling is om de schijven naar een ander veld te verplaatsen.

Menige puzzelaar concludeerde na enig proberen dat er geen oplossing is. Ten onrechte. Het aantal zetten wordt wél iets groter.

In de volgende opgave zijn de schijven weer ongekleurd.

Opgave 2
Er zijn zeven velden A, B, C, D, E, F, G. Op veld A ligt een stapel van 10 schijven. Het doel is alle schijven naar veld G te brengen. De extra spelregel is nu: alleen een zet naar een veld dat 'verderop in het alfabet ligt', is toegestaan.

Oplossingen en kerstprijs
Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten én bovendien een *kerstprijs* (een boekenbon van € 30,00) te verdienen met uw oplossing.
De deadline is *3 januari 2004*.

Prijzen
Wat betreft het prijzenpakket voor de rest van de jaargang: de kerstprijs en de eerste ladderprijs worden tegelijk uitgekeerd (bekendmaking in Euclides 79-5), de prijsjes voor de trouwe inzenders vallen na inzending van de oplossingen van opgave(n) 79-6, en de tweede ladderprijs na 79-8. De bekendmaking in Euclides is, zoals u begrijpt, steeds twee nummers later.

Veel plezier!

Oplossing 'De vijf dames op het schaakbord'

Volledige oplossingen kwamen binnen van D. Buijs, W. Doyer, T. Afman en L. de Rooy, terwijl T. Kool alleen de eerste opgave tot een goed einde bracht.

Met vijf Dames is een veilige stelling op een bord van 11 bij 11 mogelijk, dus $D(11) = 5$. Deze stelling heeft dezelfde symmetrie als het gegeven voorbeeld voor $n = 9$. Een beschrijving is het eenvoudigst als we een coördinatenstelsel aanbrengen met (0,0) op het middelste veld. Zet nu een Dame op (0,0) en ook Dames op (2,4), (-4,2), (-2,-4) en (4,-2).

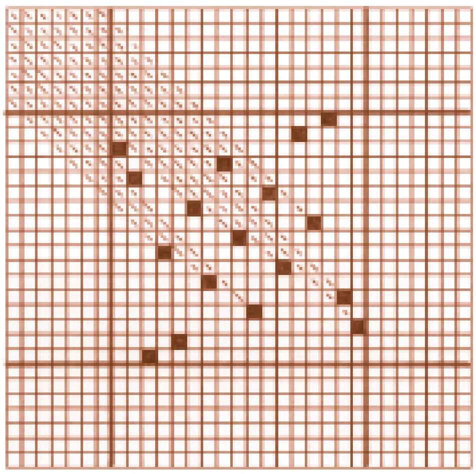
Eén van de inzenders bekeek ook grotere borden en vond $D(12) = 7$, maar als we het bord van 11 bij 11 inbedden in een bord van 12 bij 12, dan kun je een veilige stelling maken door een Dame te zetten op een geschikt nieuw hoekveld. Dus $D(12) \leq 6$. (In feite geldt hier het gelijkteken.)

kolom staat een Dame. Als we het bord dan uitbreiden in alle richtingen, zien we dat de 17 Dames twee oneindig lange stroken bestrijken. Nu proberen we de Dames zó te verzetten, met behoud van bovenstaande eigenschappen, dat de Loperlijnen (diagonalen) zoveel mogelijk effect hebben. Dit komt neer op de volgende puzzel.

Verdeel de getallen 1, 2, ..., 8 in vier paren (a_i, b_i) met $i = 1,2,3,4$ zó, dat de getallen 1, 2, ..., r voorkomen onder $|a_i - b_i|$, $a_i + b_i$ (i = 1,2,3,4) met r maximaal.

Een mogelijkheid is de constellatie (5,1), (2,3), (4,7), (6,8) met r = 6. Een Dame op (0,0) zorgt voor de lange diagonalen.
De zijde van het bord wordt $17 + 2 \cdot (6 + 1) = 31$.
Wobien Doyer merkt tevreden op: 'Daarmee had ik de opgave opgelost voordat ik iets had getekend!'

Als u, ter controle, in figuur 2 vanuit een veld in de linker-bovenhoek de streepjeslijn volgt,



FIGUUR 2

komt u altijd bij een Dame uit. De symmetrie garandeert dat ook de velden in de andere hoeken worden bestreken.

Ik had het idee dat de manier waarop ik de Dame-zetten definieerde samen met de gegeven symmetrische oplossing, een aanwijzing zou vormen voor de oplossing van de tweede opgave. Maar alleen Wobien Doyer vond deze aanpak.

Begin met een bord van 17 bij 17, met in het midden, op (0,0), een Dame. In het eerste kwadrant van 8 bij 8 zetten we dan vier Dames zó, dat de acht coördinaten de getallen 1, 2, ..., 8 zijn. Draai deze constellatie om (0,0) naar de drie andere kwadranten. Voor het vierkant van 17 bij 17 geldt nu: in iedere rij en in iedere

De ladder

Bovenaan de ladder staan nu T. Afman en W. Doyer (140). Zij worden gevolgd door D. Buijs (99), T. Kool (66), P. Stuut (61), L. de Rooy (60) en A. Verheul (59).
De complete ladderstand is weer te vinden op de NVvW-website (*www.nvvw.nl/euclladder.html*).

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in de lopende jaargang.
Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
4	22 januari 2004	2 december 2003
5	26 februari 2004	13 januari 2004
6	15 april 2004	2 maart 2004
7	26 mei 2004	30 maart 2004
8	24 juni 2004	11 mei 2004

dinsdag 16 december 2003
Studiedag Wiskundeonderwijs moet spannender en uitdagender
Organisatie RU, Groningen

zaterdag 10 januari 2004
Wintersymposium Wiskundig Genootschap
Zie pagina 103 in dit nummer.

14 januari t/m 16 januari 2004
22e Panamaconferentie
Organisatie Freudenthal Instituut

donderdag 15 januari 2004
2e Reehorstconferentie wiskunde
Zie APS-advertentie in Euclides 79-1.

vrijdag 16 januari 2004
Wiskunde Olympiade 2004
Zie pagina 125 in dit nummer.

6 en 7 februari 2004
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut
Zie pagina 124 in dit nummer.

vrijdag 13 februari 2004
BWI-middag (voor docenten en leerlingen)
Organisatie VU, Amsterdam

vrijdag 19 maart 2004
Kangoeroe 2004
Organisatie KUN

25 en 26 maart 2004
Nationale Rekendagen
Organisatie Freudenthal Instituut

16 en 17 april 2004
Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres
Organisatie KWG en BWG

donderdag 22 april 2004
4e Conferentie ICT in het onderwijs
Zie pagina 125 in dit nummer.

zaterdag 15 mei 2004 (was 29 mei 2004)
10e HKRWO-Symposium
Organisatie Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW
(http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html